***__Exercice 1__ Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de l'endomophisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$f(P) = (X+1)(X-3)P' - XP.$$

Indication : On pourra examiner les termes de plus haut degré et se demander quel est le degré possible d'un polynôme qui est vecteur propre.

__Exercice 2__ Déterminer les valeurs propres et des bases des sous-espaces propres des endomorphismes canoniquement associés aux matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$,

$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -6 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

__Exercice 3__ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre. (NB : il y a deux valeurs propres). Diagonaliser A si c'est possible (en le justifiant).

__Exercice 4__

1. Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable admettant 1 pour SEULE valeur propre ?
   Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable admettant une unique valeur propre λ ?
   La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? inversible ?
   et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? inversible ?
2. Donner un exemple de matrice
   (a) diagonalisable et inversible,
   (b) diagonalisable et non inversible,
   (c) non diagonalisable et inversible,
   (d) non diagonalisable et non inversible.

__Exercice 5__ Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Chercher les valeurs propres et vecteurs propres de A.
2. A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice de passage diagonalisant A, puis calculer $P^{-1}AP$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer A^n.

__Exercice 6__ Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de A. Diagonaliser A.

__Exercice 7__ Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ sont diagonalisables.
La matrice $A.B$ est-elle diagonalisable ?

__Exercice 8__ Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\delta(P) = P(X) - P(X-1)$.
Décrire le noyau et l'image de Δ. Donner le spectre de Δ et préciser si c'est un endomorphisme diagonalisable.

__Exercice 9__ Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Montrer que f est diagonalisable. Que dire de f ?

__Exercice 10__ Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'application qui à toute matrice A de E associe $u(A) = A^T$ où A^T désigne la transposée de A. Montrer que u est diagonalisable et déterminer une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de u.

__Exercice 11__ Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est nilpotente 2. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ 3. $\chi_A = X^n$ 4. $A^n = 0$

Exercice 12 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 13 Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Attention : ruse qui n'a pas grand chose à voir avec le chapitre en cours

Exercice 15 Calculer A^n, avec $n \in \mathbb{N}$, sachant que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 16 1) Rechercher les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ puis diagonaliser, si possible, A. En déduire A^n où $n \in \mathbb{N}$.
2) Rechercher les valeurs propres puis diagonaliser si possible les matrices B et C suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 Soit $u_0 = 1,\ v_0 = 1,\ w_0 = -1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} &= -u_n + w_n \\ w_{n+1} &= -u_n + v_n \end{cases}$$

Calculer $u_n,\ v_n$ et w_n en fonction de n.

Exercice 18 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E vérifiant :

$$f^3 - f^2 + f - id_E = 0.$$

1. Que dire des valeurs propres de f ? On distinguera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
2. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

Exercice 19 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Enfin, soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$.

On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k f^k$.

1. Démontrer que : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f),\ P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(f))$.
2. Soit R un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$ tel que $R(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Que dire des valeurs propres de f ?
3. On dit qu'un endomorphisme g est nilpotent si : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $g^k = 0$.
   Soit $g \in \mathcal{L}(E)$; on suppose g nilpotent. Montrer que : g est diagonalisable si et seulement si $g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 20 Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ii} = x$ et $a_{ij} = 1$ pour $i \neq j$.
A est-elle diagonalisable ? Si oui, calculer la matrice de passage P, ainsi que P^{-1}.
Indication : il n'est pas interdit de remarquer que cette matrice est proche d'une matrice étudiée en cours.

Exercice 21 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A puis trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$.

Exercice 22 Trouver toutes les matrices B de taille 3 telles que $B^2 = A$, avec $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Indication : diagonaliser A.....

Exercice 23 (Oral) Dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(R)$, on considère les matrices A et M vérifiant

$$A^3 = -A, \quad \mathrm{rang}(A) = 2 \quad et \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(C)$. Déterminer alors une réduite ; que peut-on dire des matrices de passage à la forme diagonale ?
2. Calculer M^3.
3. En déduire que A est semblable à M dans $\mathcal{M}_3(R)$.

Exercice 24 (Oral) Soit a un réel donné. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'application définie sur E par

$$f(P) = (X-a)(P' + P'(a)) - 2(P - P(a))$$

Vérifier que f est bien un endomorphisme de E. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 25 Soit n un entier naturel non nul et soit A la matrice d'ordre n de terme général a_{ij} où :

$$a_{ij} = 1 \text{ si } j = 1,\ a_{ij} = 1 \text{ si } i = n \text{ et } a_{ij} = 0 \text{ si } j \neq 1 \text{ et } i \neq n.$$

1. Donner une base de $\mathrm{Im}(A)$.
2. Montrer que 0 est valeur propre de A. Calculer la dimension et une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
3. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Exercice 26 Pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, on considère la matrice $M(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$.

1. Montrer que les matrices $M(a, b, c)$ commutent entre elles.
2. Montrer que ces matrices ont une base de diagonalisation commune (on pourra chercher à écrire $M(a, b, c) = aI_n + bJ + cJ'$ où J et J' sont des matrices que l'on pourra étudier...)
3. Donner les éléments propres de ces matrices.

Exercice 27 Trigonaliser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 28 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 7\,u_{n+1} - 6u_n.$$

Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 29 (Oral) Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres. Sont-elles diagonalisables ? Sont-elles semblables ? Les diagonaliser ou les trigonaliser, selon ce qui est possible...

Exercice 30 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe une base dans laquelle u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (on pourra s'intéresser à la matrice $B = A - 2I_3$.

Exercice 31 **Approfondissement** : Soit A une matrice réelle. Il peut arriver que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ne le soit pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par exemple si le spectre de A est vide dans $\mathbb{R}$ (le polynôme caractéristique n'a pas de racine réelle).
En revanche, si le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ (les valeurs propres de A sont toutes réelles), alors : (A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) $\iff$ (A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
Autrement dit : $(\exists Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}AQ = D \in \mathcal{D}_n(R))$ $\iff$ $(\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D)$.
Il est clair que : si il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, alors $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Autrement dit : ($A$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) $\Rightarrow$ (A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
La réciproque est moins triviale. C'est un exercice classique.
Supposons que : $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Comme on a supposé que toutes les valeurs propres étaient réelles, la matrice D est une matrice réelle. Ecrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices réelles. On a alors : $AP = PD \Rightarrow A(R + iS) = (R + iS)D$ donc, les matrices A et D étant réelles, on en déduit que $AR = RD$ et $AS = SD$.
Montrer qu'il existe un réel x tel que $R + xS$ soit inversible. Puis conclure.....
Remarque : on pourra montrer que la fonction $(x \mapsto \det(R + xS))$ est une fonction polynomiale de degré au plus n.