Partie 1 : Exercices pour les TD

Exercice 1 Etudier la convergence simple, et uniforme de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

Exercice 2 Etudier la convergence simple, et uniforme de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}$$

Exercice 3 Etudier la convergence simple, et uniforme de la suite de fonctions définies sur $]0,1]$ par :

$$f_n(x) = \min(n, \frac{1}{x})$$

Exercice 4 Etudier la convergence simple, et uniforme de la suite de fonctions définies sur $[0;1]$ par :

$$f_n(x) = nx^n(1-x)$$

Préciser la convergence uniforme sur les segments de la forme $[0;a]$ avec $0 < a < 1$.

Exercice 5 On définit une suite de fonctions (f_n) par :

$$\forall x \in [0;2],\ f_0(x) = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;2],\ f_{n+1}(x) = \sqrt{2+f_n(x)}$$

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions.
2. Démontrer que chaque fonction f_n est croissante, puis étudier la convergence uniforme.

Exercice 6 (Suite de fonctions et dérivation)

Pour tout entier n non nul, et pour tout réel x, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$.
Etudier la convergence uniforme de (f_n) .

Les fonctions (f_n) sont-elles dérivables ? A-t-on la convergence de la suite des (f'_n) ?

Exercice 7 Pour $x \in [0;1]$, on pose : $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^nx^2}$

1. Déterminer f la limite simple de (f_n).
2. Etudier la convergence uniforme de (f_n).
3. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$; puis comparer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 8 Pour $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2-nx+n^2}$.

Etudier le type de convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 9 Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général $f_n\colon t \mapsto 1/(1+(nt)^2)$.
Montrer que la somme est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

Exercice 10 Montrer que $S\colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est définie sur $]0,+\infty[$.

L'application S est-elle continue ? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 11 Problème asymptotique.

Soit (f_n) une suite de fonction qui converge uniformément vers f sur $[a,+\infty[$. Comment étudier la limité de f en $+\infty$?

Exemple : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ pour $x > 1$. On pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

1. Etudier la convergence normale de $\sum u_n$.
2. Montrer que S est continue sur $]1,+\infty[$.
3. Quelle conjecture pouvez vous faire sur la limite de S en $+\infty$?
   La démontrer en s'inspirant de la démonstration du cours sur la continuité.

Exercice 12 On pose $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de la somme de la série de terme général f_n.
2. Calculer la somme $S\colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
3. La somme S est-elle continue sur D ?

Exercice 13 Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{x+1}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x}{n^{x+1}}$. (Méthode : comparaison série/intégrale)

Partie 2 : Exercices issus de la banque CCINP

Exercice 14 (analyse, ex9)

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}x\right)$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
   (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
   (c) Soit $a>0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?
   (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Exercice 15 (analyse, ex10)

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

Exercice 16 (analyse, ex11)

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $\left(f_n(x_n) - f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0,+\infty[$.

Exercice 17 (analyse, ex12)

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0\in[a,b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, x\in[0;1]$, $g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

Exercice 18 (analyse, ex13)

1. Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
   On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
   Démontrer que la fonction g est bornée.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \begin{cases} n^3x & \text{si } |x|\leqslant \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \dfrac{1}{n}\end{cases}$
   Prouver que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 19 (analyse, ex14)

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a<b$. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Exercice 20 (analyse, ex15)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

Exercice 21 (analyse, ex16) On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 22 (analyse, ex17) Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication suivante :

$$\Big(\text{la série } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\Big) \Rightarrow (\text{la suite } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A)$$

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0; +\infty[$, $f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.
   $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$? Justifier.

Exercice 23 (analyse, ex18) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (b) La fonction S est-elle continue sur D ?

Exercice 24 (analyse, ex27)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + n^2 x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2. Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 25 (analyse, ex53)

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^4 x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a, +\infty[$?
   (c) $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.