

Introduction. Nous avons déjà rencontré la série géométrique :

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1, \sum_{n \geq 0} z^n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

On s'intéresse dans ce chapitre à des séries $\sum a_n z^n$ dépendant de $z \in \mathbb{C}$. De même que pour la série géométrique, on énoncera une condition portant sur $|z|$ pour affirmer que la série converge.

Les objectifs essentiels de ce chapitre sont les suivants :

1. Une série entière étant donnée, déterminer (si possible) l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge et

étudier ensuite l'application $(z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)$ (on se restreindra souvent à la restriction de cette fonction à \mathbb{R}).

2. Une application f définie sur un intervalle de \mathbb{R} étant donnée, existe-t-il une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ telle que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ dans une certaine partie de } \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} ?$$

I Convergence d'une série entière

I.1 Introduction

Définition 1 Soit (a_n) une suite de nombres complexes.

On appelle **série entière** associée à la suite (a_n) la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(z) = a_n z^n$.

En pratique, on la note (abusivement) $\sum a_n z^n$.

Exemple 1 • La série $\sum z^n$ est une série entière. Elle converge si et seulement si $|z| < 1$.

- La série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est une série entière. Montrer qu'elle converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

- On considère que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ est une série entière, avec $a_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 0$.

Montrer que cette série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$.

I.2 Rayon de convergence, disque de convergence

Théorème 1 Lemme d'Abel. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On suppose qu'il existe un réel $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée. Alors pour tout complexe z tel que $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument (donc converge).

Conséquence : L'ensemble $I = \{r \geq 0, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ est un intervalle non vide de \mathbb{R} .

Définition 2 Soit (a_n) une suite à valeurs dans \mathbb{C} . On note $I = \{r \geq 0, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.

- Si I est majoré, alors I possède une borne supérieure $R \in \mathbb{R}$.

- Si I n'est pas majoré, on pose $R = +\infty$.

R est alors appelé rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de I dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

$$R = \sup\{r \geq 0, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$$

N.B. : $I \neq \emptyset$ car $0 \in I$ et c'est un sous-ensemble de \mathbb{R} .

Théorème 2 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

- $R = 0 \iff$ la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.
- Si $R > 0$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si $R \neq +\infty$, alors pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente et $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.
- $R = +\infty \iff$ la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Définition 3 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R et soit

$$D = \{z \in \mathbb{C}, \text{ tels que } |z| < R\}. \quad (\text{Si } R = +\infty, \text{ alors } D = \mathbb{C}.)$$

L'ensemble D est appelé disque ouvert de convergence de la série entière.

L'intervalle ouvert $] -R, R[\subset \mathbb{R}$ est appelé l'intervalle ouvert réel de convergence.

Remarque 1 Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.

Exemple 2 Le rayon de convergence de la série géométrique $\sum z^n$ vaut :

Soit $a \in \mathbb{C}$. Le rayon de convergence de la série $\sum a^n z^n$ vaut :

Le rayon de convergence de la série $\sum n z^n$ vaut :

Le rayon de convergence de la série $\sum n! z^n$ vaut :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ vaut :

Exemple 3 Les exemples ci dessous illustrent le fait que, pour une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence R , le comportement de la série pour les valeurs de z telles que $|z| = R$ n'est pas déterminé par le théorème 2

- Quel est le rayon de convergence R de la série $\sum \frac{z^n}{3^n}$?
Quel est le comportement de la série $\sum \frac{z^n}{3^n}$ lorsque $|z| = R$?
- Quel est le rayon de la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$?
Quel est le comportement de la série $\sum \frac{z^n}{n}$ lorsque $z = R$? Lorsque $z = -R$?
- Quel est le rayon de la série entière $\sum \frac{z^n}{n^2}$?
Quel est le comportement de la série $\sum \frac{z^n}{n^2}$ lorsque $|z| = R$?

I.3 Méthodes pour déterminer le rayon de convergence

Proposition 1 (Utilisation d'inégalités. dem)

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

- Conditions suffisantes pour que $|z_0| \leq R$.

La suite $(a_n z_0^n)$ est bornée $\implies |z_0| \leq R$

La suite $(a_n z_0^n)$ est convergente $\implies |z_0| \leq R$

La série $\sum a_n z_0^n$ converge $\implies |z_0| \leq R$

La série $\sum a_n z_0^n$ converge absolument $\implies |z_0| \leq R$

- Conditions suffisantes pour que $|z_0| \geq R$.

La suite $(a_n z_0^n)$ n'est pas bornée $\implies |z_0| \geq R$

La suite $(a_n z_0^n)$ ne converge pas vers 0 $\implies |z_0| \geq R$

La série $\sum a_n z_0^n$ diverge $\implies |z_0| \geq R$

La série $\sum |a_n z_0^n|$ diverge $\implies |z_0| \geq R$

Remarque 2 (mnémotechnique) : Lorsque les inégalités faisant intervenir le rayon de convergence figurent en hypothèse, ce sont des inégalités strictes. En revanche, les inégalités figurant dans les conclusions sont larges...

Remarque 3 Si la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^+$ et si la série $\sum |a_n| R^n$ converge, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout z du disque fermé $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C}, \text{ tels que } |z| \leq R\}$.

Théorème 3 (Comparaison des rayons de convergences. dem)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

- Si $|a_n| \leq |b_n|$ (à partir d'un certain rang) alors $R_a \geq R_b$.
- Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.
- Si $a_n = o(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.
- Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.

Exemple 4 Donner les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \arctan\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n \text{ et } \sum \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n)\right) x^n$$

Théorème 4 (Crière de D'Alembert pour les séries entières dem.)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, telle que $\forall n, a_n \neq 0$.

On suppose que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ a une limite ℓ .

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$ où $\ell \in]0, +\infty[$ alors
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, alors $R = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$, alors $R = 0$.

Corollaire 1 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série $\sum n^\alpha x^n$ vaut 1.

Exemple 5 1. Déterminer les rayons de convergence des séries suivantes :

$$\sum n z^n \quad \sum \frac{2^n}{3^n + n} z^n \quad \sum \frac{z^n}{n!}$$

2. Montrer que les séries entières de la forme $\sum Q(n)z^n$ où $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ ont toutes un rayon de convergence égal à 1.

Théorème 5 (Rayon de convergence de $\sum n a_n z^n$. dem) Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Preuve Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et soit R' celui de $\sum n a_n z^n$.

Pour $n \geq 1$, $|a_n| \leq n|a_n|$ donc d'après le théorème 3 : $R' \leq R$.

Soit z un complexe tel que $|z| < R$. Alors il existe un réel s tel que $|z| < s < R$.

On écrit alors : $n a_n z^n = a_n s^n \times n(\frac{z}{s})^n$. Puisque $|\frac{z}{s}| \in [0, 1[$, on en déduit que $(n(\frac{z}{s})^n)$ tend vers 0. Au fait POURQUOI ?

$(n(\frac{z}{s})^n)$ tend vers 0 donc la suite $(n(\frac{z}{s})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n, |n(\frac{z}{s})^n| \leq M$.

Donc $|n a_n z^n| = |a_n s^n \times n(\frac{z}{s})^n| \leq |a_n s^n| M$. Or $(|a_n s^n|)$ est bornée car $|s| < R$. Donc $(n a_n z^n)$ est bornée, ce qui signifie que $|z| \leq R'$.

Conclusion : $|z| < R \Rightarrow |z| \leq R'$. On en déduit que $R \leq R'$.

Corollaire 2 $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Preuve D'après le théorème précédent, le rayon de convergence de $\sum a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ est le même que celui de $\sum a_n z^{n+1}$ qui est le même que celui de $\sum a_n z^n$.

Exemple 6 Donner les rayons de convergence des séries entières suivantes : $\sum n z^n$, $\sum n 2^n z^{2n}$.

II Opérations algébriques sur les séries entières

Proposition 2 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R , et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si $\lambda = 0$, le rayon de la série entière $\sum \lambda a_n z^n$ est $+\infty$.

Si $\lambda \neq 0$, le rayon de la série entière $\sum \lambda a_n z^n$ est R et de plus :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Proposition 3 Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

On note R le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$.

Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.

Si $R_a = R_b$, alors $R \geq \min(R_a, R_b)$.

Dans tous les cas, pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

Exemple 7 Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum (3^n + \frac{1}{5^n}) z^n$, et sa valeur pour $|z| < R$.

Remarque 4 Rappeler la définition du produit de Cauchy de deux séries ainsi que le théorème sur le produits de Cauchy de deux séries.

Théorème 6 (Série produit. dem)

Soient $S = \sum a_n z^n$ et $T = \sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

La série entière produit (de Cauchy) de S et de T est la série entière $U = \sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Le rayon de convergence de la série U vérifie $R_c \geq \min(R_a; R_b)$.

Pour tout complexe z tel que $|z| < \min(R_a; R_b)$, on a $U(z) = S(z)T(z)$, c'est à dire :

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < \min(R_a; R_b), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

Exemple 8 Illustrer le résultat précédent avec $a_n = b_n = 1$ pour tout entier n .

Exemple 9 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ et soit f la fonction définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ pour } |z| < R.$$

Déterminer une expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) z^n$ en fonction de $f(z)$ lorsque $|z| < 1$.

II.1 Continuité de la fonction somme**Proposition (admise) 1 (Continuité sur le disque ouvert de convergence)**

Soit $S = \sum a_n z^n$ une série entière et $R > 0$ son rayon de convergence.

La fonction $z \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$

III Propriétés de la somme d'une série entière d'une variable réelle

Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'à des séries entières de la **variable réelle**.

III.1 Régularité

Théorème 7 (Convergence normale. dem) Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence R . La série entière $\sum a_n t^n$ converge normalement sur tout segment $[a; b] \subset]-R; R[$.

Conséquence : $t \mapsto \sum a_n t^n$ est continue sur $] - R; R[$.

Théorème 8 (Dérivation terme à terme. dem)

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

f est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle ouvert $] - R; R[$.

De plus : $\forall x \in] - R; R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$.

Et pour tout entier p , on a :

$$\forall t \in] - R; R[, \quad f^{(p)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\dots(n+p) a_{n+p} t^n = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n t^{n-p}$$

En particulier, pour tout entier p , on a : $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$

Exemple 10 Illustrer le résultat précédent avec la série entière $\sum t^n$

Théorème 9 (Primitivation. dem) Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

On note $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, définie pour $t \in] - R; R[$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$ est égal à R .

Pour tout réel $t \in] - R; R[$, $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$ où F est l'unique primitive de f vérifiant $F(0) = 0$.

Autrement dit : $\forall t \in] - R; R[, \int_0^t f(u) du = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}$.

Preuve C'est une conséquence du théorème 8 appliqué à la série $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Exemple 11 Illustrer le résultat précédent avec la série entière $\sum t^n$

Exemple 12 Montrer que : $\forall x \in] - 1, 1[, \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

Montrer que : $\forall x \in] - 1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$

Exemple 13 Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$

III.2 Fonctions développables en série entière

Définition 4 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie au voisinage de 0.

On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0 lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un réel r tel que $0 < r \leq R$ tel que :

$$\forall t \in]-r; r[\subset I \quad \text{et} \quad \forall t \in]-r; r[, f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Proposition 4 (Unicité du développement en série entière)

Si une fonction f , définie au voisinage de 0, est développable en série entière sur $] -r, r[$, alors f est de classe C^∞ sur cet intervalle; de plus il existe une unique série entière dont f est la somme au voisinage de 0.

Cette série est la série de Taylor de f en 0 : $\forall t \in]-r; r[, f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$

Remarque 5 Attention : une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0 n'admet pas forcément de DSE, et la série de Taylor n'est pas toujours égal à la fonction.

Prenons par exemple : $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On montre par récurrence que $f^{(k)}(0) = 0$ et donc que la série de Taylor de f est la fonction nulle. Mais la fonction f n'est pas identiquement nulle. Donc la série de Taylor de f n'est pas égale à f . Par voie de conséquence, f n'est pas développable en série entière.

Définition 5 (Série entière au voisinage de a)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est développable en série entière au voisinage de a lorsque la fonction $t \rightarrow f(a+t)$ est développable en série entière au voisinage de 0.

III.3 Developpements en série entière usuels

III.3.a Un rappel utile

Théorème 10 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit f une fonction de classe C^∞ de $] -r, r[$ dans \mathbb{R} . Alors, pour tout $x \in] -r, r[$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

III.3.b Développements en série entière des fonctions usuelles

Fonction	DSE(0)	Rayon	Convergence sur ...	Méthode
$f(x) = \frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	$I =]-1, 1[$	connu !
$f(x) = \frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	1	$I =]-1, 1[$	connu !
$f(x) = \ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$	1	$I =]-1, 1]$	Intégration de $\frac{1}{1+x}$
$f(x) = -\ln(1-x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$I = [-1, 1[$	Intégration de $\frac{1}{1+x}$
$f(x) = e^x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$		Taylor
$f(x) = \operatorname{ch}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$		Somme de DSE(0)
$f(x) = \operatorname{sh}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$		Somme de DSE(0)
$f(x) = \cos(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$		Taylor
$f(x) = \sin(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$		Taylor
$f(x) = (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{N}$	$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ ou bien $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	$+\infty$ $+\infty$		Formule du binôme la somme est finie....
$f(x) = (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$	$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ "formule du binôme généralisé"	1	$I =]-1, 1[$	Equation différentielle
$f(x) = \operatorname{Arctan}(x)$	$\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$			

Remarque 6 Le développement de $(1+x)^\alpha$ est souvent utilisé avec $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\forall t \in]-1; 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \dots$$

Remarque 7 Par dérivation terme à terme du DSE de $\frac{1}{1-t}$, on déduit ceux de $\frac{1}{(1-t)^2}$ et de $\frac{2}{(1-t)^3}$:

$$\left(\forall t \in]-1; 1[, \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) \implies \left(\forall t \in]-1; 1[, \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} \right) \implies \left(\forall t \in]-1; 1[, \frac{2}{(1-t)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) t^{n-2} \right)$$

Etc....

III.4 Recherche du développement en série entière d'une fonction

III.4.a A l'aide des DSE(0) connus

On utilise les DSE connus et les théorèmes de **sommation**, de **dérivation** et d'**intégration** et le **produit de Cauchy** de deux séries entières.

C'est toujours possible pour une fraction rationnelle qu'on décompose en éléments simples (éventuellement sur \mathbb{C}). On se retrouve avec des séries géométriques et des dérivées des séries géométriques.

Par exemple $\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a(1-\frac{x}{a})} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n$ pour $|x| < |a|$.

Puis $\frac{1}{(a-x)^2} = \left(\frac{1}{a-x}\right)' = \dots$

Exemple 14 Déterminer les DSE(0) des fonctions suivantes. Préciser le rayon de convergence de chacune des séries entières obtenues.

$$(a)f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (b)f(x) = \text{Arctan}(x) \quad (c)f(x) = \frac{e^{-3x} - 1}{x} \quad (d)h(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

Exemple 15 Déterminer le DSE(0) de la fonction suivante, en précisant son rayon de convergence :

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

Attention : réfléchir deux minutes avant de se lancer dans un calcul immonde...

Exemple 16 $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ où $z \in \mathbb{C}$; $f(z) = \frac{1-z^2}{1-2z\cos(\alpha)+z^2}$ où $z \in \mathbb{C}$

Exemple 17 Utilisation des théorèmes de dérivation et d'intégration.

Déterminer les DSE(0) des fonctions suivantes (préciser les rayons de convergence) :

$$(a) f(x) = \int_0^x \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt \quad (b) g(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt \quad (c) \star \star h(x) = \ln(1 - 2x \cos(\alpha) + x^2)$$

Indication pour (c) :

III.4.b En utilisant les formules/inégalités de Taylor

Voir démarche utilisée pour les formules usuelles !!

III.4.c Méthode de l'équation différentielle

: Prenons un exemple.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Montrer qu'elle est développable en série entière.

On remarque que f est dérivable sur son domaine de définition et que $f'(x) = 2xf(x) + 1$.

Donc f est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On cherche une solution développable en série entière, donc de la forme : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

La condition initiale impose :

Soit R le rayon de convergence de cette éventuelle série entière. Alors R est aussi le rayon de convergence de la série

entière $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

L'équation différentielle s'écrit alors, pour $x \in]-R, R[$: $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1$.

Ce qui s'écrit : $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 1$.

On fait attention aux premiers termes de la série :

Par unicité du DSE en série entière, on en déduit : $a_1 = 1, a_2 = 0$ et $\forall n \geq 2 : a_{n+1} =$
On en déduit que

Si $R \neq 0$, alors $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$ pour $x \in]-R, R[$.

Quel est le rayon de convergence ?

Exemple 18 Détermination d'une somme à l'aide d'une équation différentielle :

$$\text{Soit } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1} x^n$$

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

Montrer que f vérifie l'équation différentielle suivante : $2f(x) = (1+4x)f'(x)$.

En déduire f

Exemple 19 Utilisation d'une équation différentielle pour trouver le DSE d'une fonction exprimée à l'aide des fonctions usuelles : soit $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

Justifier que f possède un développement en série entière autour de 0.

Quel est son rayon de convergence ?

Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1, puis calculer son développement en série entière.

En déduire la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$

IV Application à des calculs de sommes de séries

Evidemment, il faut très bien connaître ces formules, très utiles pour calculer notamment des sommes de séries entières en reconnaissant des expressions connues !

Par exemple $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} =$

De manière plus générale, il faut savoir reconnaître des combinaisons linéaires de séries connues, qui ont éventuellement subi quelques transformations : suppression/ajout de quelques termes initiaux, intégration terme à terme, dérivation terme à terme.

Exercice 1 1. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum n^2 x^n$ puis calculer sa somme.

2. Préciser le rayon de convergence de $\sum \frac{2n}{(2n+1)!} x^n$ puis calculer sa somme

3. Justifier la convergence puis calculer la somme de la série de terme général $a_n = \frac{n^2}{n!}$.

Exercice 2 Série entière de la forme $\sum P(n)x^n$.

Notons que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \dots$

Déterminer l'expression de la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 3n + 1)x^n$.

Exercice 3 Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^n$. Calculer le rayon de convergence de cette série entière ; calculer $f(x)$.

V Séries complexes de référence

Définition 6 Soit $D \subset \mathbb{C}$ le disque ouvert de centre O et de rayon $R > 0$.

Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ est dite développable en série entière sur D si il existe une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

telle que : $\forall z \in D, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

V.1 Série géométrique

On connaît déjà la fonction $\left(z \mapsto \frac{1}{1-z}\right)$, qui est développable en série entière sur le disque unité ouvert.

V.2 Exponentielle complexe

Définition 7 Rappel : pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$\exp(z) = e^z = e^x \times (\cos(y) + i \sin(y))$$

Rappel : On a vu que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Par ailleurs, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\cos(y) + i \sin(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$$

Ainsi on obtient : $\forall y \in \mathbb{R}, \cos(y) + i \sin(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$

Donc pour $z = x + iy$, on peut faire le produit de Cauchy des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$.

On obtiendra $e^x \times (\cos(y) + i \sin(y))$.

Quel est le terme général de ce produit de Cauchy ?

Théorème 11 $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ (le rayon de convergence étant $R = +\infty$).

Théorème 12 Exponentielle d'une somme : si z et z' sont deux complexes, alors

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$$