

Déroulement : La colle comporte :

- **Pour les 3/2 :** une question de cours suivie de un ou deux exercices sur les chapitres au programme. Une question de cours (cf ci-dessous) peut être complétée par des formules ou théorèmes à énoncer précisément.
- **Pour les 5/2 :** la question de cours peut être remplacée par un exercice suivants de la banque CCINP : analyse : 9,10,11,12, 14, 16,18.

I : Suites et séries de fonctions

Ce chapitre a pour objectif de définir différents modes de convergence d'une suite, d'une série de fonctions et d'étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés des fonctions.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.

Utilisation d'une majoration uniforme de $|f_n(x)|$ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$.

La convergence normale entraîne la convergence uniforme. La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.

b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I , alors f est continue sur I .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors :
$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f , et si la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g , alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f' = g$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension aux suites de fonctions de classe \mathcal{C}^k , sous l'hypothèse de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ et de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leq j < k$.

c) Régularité de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I , alors sa somme est continue sur I .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série des intégrales est convergente et :
$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Dérivation de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de classe \mathcal{C}^1 converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I , alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension à la classe \mathcal{C}^k sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

II : Questions de cours

1. Continuité d'une limite uniforme d'une suite de fonctions (dem)
2. Intégration et passage à la limite pour une suite de fonctions continues sur un segment (dem)
3. Dérivation et passage à la limite (dem)
4. définitions de la convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions. lien entre ces convergences (dem)
5. Continuité d'une série de fonctions (dem)
6. Dérivabilité d'une série de fonction et intégration. (dem)