Programme de colle. Semaine n°12 : du 18/12 au 22/12/2023.

Déroulement : La colle comporte :
- **Pour les 3/2** : une question de cours suivie de un ou deux exercices sur les chapitres au programme. Une question de cours (cf ci-dessous) peut être complétée par des formules ou théorèmes à énoncer précisement.
- **Pour les 5/2** : la question de cours peut être remplacée par un exercice suivants de la banque CCINP : analyse : 9,10,11,12, 14, 16,18.

I : Suites et séries de fonctions : cours et exercices

a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

Voir programme précédent

b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Voir programme précédent.

c) Régularité de la somme d'une série de fonctions

Continuité, dérivation, intégration : voir le programme précédent.

d) Théorème de la double limite

Si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

III : Séries entières : Cours seulement

a) Rayon de convergence

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.
Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée. La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et elle diverge grossièrement si $|z| > R$.
Intervalle ouvert de convergence.
Disque ouvert de convergence.
Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) :
- si $a_n = O(b_n)$ (ou $a_n = o(b_n)$), alors $R_a \geqslant R_b$;
- si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R\left(\sum n^\alpha x^n\right) = 1$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon. La limite du rapport $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être directement utilisée.
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.
Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Unicité du développement en série entière.

II : Questions de cours

1. Continuité d'une limite uniforme d'une suite de fonctions (dem)
2. Intégration et passage à la limite pour une suite de fonctions continues sur un segment (dem)
3. Dérivation et passage à la limite (dem)
4. défintions de la convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions. lien entre ces convergences (dem)
5. Continuité d'une série de fonctions (dem)
6. Dérivabilité d'une série de fonction et intégration. (dem)

- Lemme d'Abel (pour les séries entières) (dem)
- Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n z^n$. (dem)
- Si $a_n \sim b_n$, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence. (dem)