Déroulement : La colle comporte :

- **Pour les 3/2** : une question de cours suivie de un ou deux exercices sur les chapitres au programme. Une question de cours (cf ci-dessous) peut être complétée par des formules ou théorèmes à énoncer précisement.
- **Pour les 5/2** : la question de cours peut être remplacée par un exercice suivants de la **banque CCINP : analyse exerices 2, 19, 20, 21**

I : Séries entières

a) Rayon de convergence

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.
Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée. La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et elle diverge grossièrement si $|z| > R$.
Intervalle ouvert de convergence.
Disque ouvert de convergence.
Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) :

— si $a_n = O(b_n)$ (ou $a_n = o(b_n)$), alors $R_a \geqslant R_b$;
— si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R\left(\sum n^\alpha x^n\right) = 1$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon. La limite du rapport $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être directement utilisée.
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.
Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Unicité du développement en série entière.
Développements des fonctions usuelles. Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire (du premier ordre, à ce stade de l'année).

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence (admise).
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.

II : Compléments sur les variables aléatoires réelles discrètes : cours seulement

1) Lois usuelles

Révisions sur les variables aléatoites finies : certaine, uniforme, Bernoulli, Binomiale.
Variable géométrique de paramètre $p \in]0,1[$: $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. Notation $X \sim \mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. Notation $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation de la loi de Poisson comme la loi des événements rares.

2) Espérance et variance

a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle Variable aléatoire X à valeurs réelles d'espérance finie, espérance de X. La variable aléatoire X à valeurs dans $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ est d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est **absolument** convergente. Dans ce cas, la somme de cette série est l'espérance de X. Variable aléatoire centrée.

Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, égalité : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.

Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.
Formule de transfert (admise) : si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ et si f est définie sur cet ensemble et à valeurs réelles, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si $\sum f(x_n) P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas : $E\Big(f(X)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) P(X = x_n)$.
Linéarité de l'espérance (démonstration hors programme). Positivité, croissance de l'espérance.
Si $|X| \leqslant Y$ et Y d'espérance finie, alors X est d'espérance finie (démonstration hors programme).
Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque sûr.
b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type : Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, XY aussi et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$. Cas d'égalité.
Variance, écart type. Notations $V(X)$, $\sigma(X)$. Variable aléatoire réduite. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle. Relation $V(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$ (formule de Huyghens). Relation $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. Variance d'une variable géométrique, de Poisson.

3) Fonction génératrice : de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)\, t^n$.

La série entière définissant G_X est de rayon $\geqslant 1$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = {G_X}'(1)$.
Utilisation de G_X pour calculer $\mathrm{E}(X)$ et $V(X)$.

III : Questions de cours

- Lemme d'Abel (pour les séries entières) (dem)
- Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n z^n$. (dem)
- Si $a_n \sim b_n$, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence. (dem)
- Etre capable de donner les développements en séries entières usuelles, en ayant une idée de la méthode de démonstration.
- Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$ (dem).
- Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.
- $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.
- $\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$ (admis dans le cas général, démontré dans le cas où le rayon de convergence est strictement supérieur à 1). Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\mathrm{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence (en paticulier lorsque le rayon de convergence est strictement supérieur à 1).
- Série génératrice de la loi binomiale.
- Espérance et variance de la loi géométrique, de la loi de Poisson.