Table des matières

I Introduction et rappels 1

II Le groupe orthogonal 2
- II.1 Isométries vectorielles . . . 2
  - II.1.a Définition, exemples . . . 2
  - II.1.b Caractérisations . . . 3
  - II.1.c Propriétés . . . 3
- II.2 Représentation matricielle des isométries, matrices orthogonales . . . 4
  - II.2.a Introduction . . . 4
  - II.2.b Caractérisations . . . 4
  - II.2.c Propriétés, applications . . . 5

III Isométries vectorielles d'un plan euclidien 6
- III.1 Matrices orthogonales de taille 2 . . . 6
- III.2 Isométries directes d'un espace de dimension 2 . . . 6
- III.3 Angle de deux vecteurs . . . 7
  - III.3.a Isométries indirectes d'un espace de dimension 2 . . . 7

IV Endomorphismes autoadjoints 8
- IV.1 Généralités . . . 8
- IV.2 Réduction des endomorphismes autoadjoints . . . 9
- IV.3 Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif . . . 9

I Introduction et rappels

Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Dans tout ce qui suit, E désignera un espace euclidien de dimension $n \neq 0$.

Un espace euclidien possède des bases orthonormales (que je noterai parfois, très abusivement « BON »).
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une BON de E, donnée pour toute cette partie **I**.

Expression du produit scalaire et de la norme dans une $\mathcal{BON}$.

Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_i e_i$. Alors $x_i = \langle x, e_i \rangle$ et $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_i^2$.

Si on note $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y)$, alors $\langle x, y \rangle = X^T \cdot Y$ et $\|x\|^2 = X^T \cdot X$.

Matrice d'un endomorphisme dans une $\mathcal{BON}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1..n}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Alors pour tout $(i, j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$, $a_{i,j} = \langle e_i, f(e_j) \rangle$.

Existence d'un supplémentaire orthogonal pour tout SEV de E.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \oplus F^{\perp} = E$. En particulier : dim(F)+dim($F^{\perp}$)=dim(E).
Ceci est vrai car E est de **dimension finie** et donc F est un SEV de dimension finie. (cf théorème du supplémentaire orthogonal pour un SEV de dimension dinie d'un espace préhilbertien réel).
Rappelons enfin que $F^{\perp\perp} =$F

Equations d'un hyperplan de E. Soit H un hyperplan de E. Alors $H^{\perp}$ est de dimension 1.

Soit $a \in H^{\perp}$, $a \neq 0$, $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. Alors $H^{\perp} = \text{vect}(a)$. On en déduit que $H = \text{vect}(a)^{\perp}$ c'est à dire :

$$x \in H \iff x \in \text{vect}(a)^{\perp}$$

ce qui s'écrit dans la BON $\mathcal{B}$: $x \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.

On dit alors que a **est un vecteur normal à l'hyperplan** H (cf vecteur normal à une droite dans le plan, vecteur normal à un plan de l'espace).

Projecteur orthogonal :

II Le groupe orthogonal

II.1 Isométries vectorielles

II.1.a Définition, exemples

Définition 1 Une **isométrie vectorielle** de E (ou endomorphisme orthogonal de E) est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ qui conserve la norme, c'est à dire que :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E et on l'appelle « groupe orthogonal (de E) ».

Remarque 1 Une application définie sur E et à valeurs dans E est une isométrie vectorielle de E si et seulement si : elle est **linéaire** et conserve la norme.
Attention : une application qui conserve la norme n'est pas toujours linéaire.
Prendre par exemple : $u\ :\ x \mapsto \|x\|e1$ où e_1 est un vecteur unitaire fixé.
Conclusion : Quand on vous demande de montrer qu'une application est une isométrie, il ne faut surtout pas oublier de mentionner qu'elle est **linéaire** !

Exemple 1

1. Quelles sont les homothéties de E qui sont aussi des isométries vectorielles ?
2. Décrire $\mathcal{O}(E)$ si dim(E)=1.
3. Quelles isométries du plan avez-vous vues en PCSI ?

Rappels sur les symétries vectorielles Si $E = F \oplus G$, alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_F, x_G) \in F \times G$, tel que $x = x_F + x_G$. On appelle alors on appelle **symétrie (vectorielle) par rapport à** F **et parallèlement à** G l'application : $x \mapsto x_F - x_G$.

définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est une symétrie vectorielle si et seulement si $f \circ f = Id_E$.
Dans ce cas : c'est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - Id_E)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + Id_E)$.

proposition

Définition 2 Symétries orthogonales.
Soit s une symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G. On dit que s est une symétrie orthogonale lorsque $G = F^{\perp}$.

Proposition 1 (dem) Une symétrie orthogonale est une isométrie.

Remarque 2 Si f est une isométrie et si $f \circ f = Id_E$, alors f est une symétrie orthogonale.

Définition 3 Réflexions. Une symétrie (vectorielle) orthogonale par rapport à un hyperplan de E est appelée **réflexion** de E.

Par exemple : dans le plan $\mathbb{R}^2$, une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle est une réflexion (du plan).
Dans l'espace $\mathbb{R}^3$: une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel est une réflexion (de l'espace).

Exemple 2 Important.
Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit s la symétrie orthogonale par rapport à F.

1. **Comment calculer l'image par s d'un vecteur de E ?**
2. Cas particulier des réflexions.

II.1.b Caractérisations

Proposition 2 Caractérisation par la conservation du produit scalaire (dem).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff \forall (x,y) \in E^2, \ \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Exercice 1 Soit u une application définie sur E, telle que $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle x, y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle$.
Montrer que u est une isométrie vectorielle.

Théorème 1 Caractérisation par l'image d'une base orthonormale (dem).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (où $E \neq \{0_E\}$). Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.
Alors $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si l'image de $\mathcal{B}$ par u est aussi une base orthonormale.

II.1.c Propriétés

Remarque 3 Soit u une isométrie vectorielle de E.
Les seules valeurs propres **possibles** de u sont :
On en déduit notamment que 0 n'est pas valeur propre de u et donc que :
Enfin, comme E est de dimension finie, on en déduit que u est :

Théorème 2

(a) Une isométrie vectorielle de E est un automorphisme de E *i.e.* $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{G}\ell(E)$.

(b) $Id_E \in \mathcal{O}(E)$

(c) La composée de deux isométries vectorielles est une isométrie vectorielle.
On dit que $\mathcal{O}(E)$ est stable par composition.

(d) Une isométrie vectorielle est bijective et sa réciproque est une isométrie vectorielle.
On dit que $\mathcal{O}(E)$ est stable par passage à l'inverse.

Théorème 3 (dem) Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.
Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors :

- u induit une isométrie vectorielle sur F , c'est à dire $u_{|F} \in \mathcal{O}(F)$
- $F^\perp$ est aussi stable par u.

II.2 Représentation matricielle des isométries, matrices orthogonales

II.2.a Introduction

Rappel Si B est une $\mathcal{BON}$ de E, si x et y sont des vecteurs de E dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont données par les matrices colonnes X et Y, alors : $\boxed{< x, y >= {}^tX \cdot Y = X^T \cdot Y.}$

Proposition 3 Soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement sa matrice M par rapport à $\mathcal{B}$ vérifie : $M^T \times M = I_n$.

Définition 4 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est **orthogonale** lorsque $M^T \cdot M = I_n$.
On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n et on l'appelle groupe orthogonal d'ordre n.

II.2.b Caractérisations

Remarque 4 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors : $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff \big(M$ est inversible et son inverse est M^T (ou ${}^tM)\big)$.
Donc : $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff M \cdot M^T = I_n$

Remarque 5 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- A est une matrice orthogonale $\iff A^T \cdot A = I_n$.
  Or $A^T \cdot A = I_n$ signifie que ses vecteurs colonnes forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.
  C'est à dire : $A^T \cdot A = I_n \iff \left(\forall (p,q) \in [\![1\,;\, n]\!]^2,\ \langle C_p, C_q \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,p} a_{i,q} = \delta_{p,q}\right)$
- $A \in \mathcal{O}(n) \iff A \cdot A^T = I_n$ donc A est orthogonale si et seulement si ses vecteurs lignes forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Théorème 4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) A est orthogonale.
(b) La famille des colonnes de A, en tant que famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
(c) $A^T \cdot A = I_n$
(d) La famille des lignes de A, en tant que famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
(e) $A \cdot A^T = I_n$
(f) A est inversible et son inverse est A^T (ou ${}^tA$)).

Exemple 3 Montrer que la matrice $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale est calculer A^{-1}.

Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ est orthogonale et donner son inverse.

II.2.c Propriétés, applications

Proposition 4 Changement de base orthonormale.
Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $\mathcal{B}'$ une base de E. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors : $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale $\iff$ P est orthogonale.

Théorème 5 (Propriétés de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$)

- Toute matrice orthogonale est inversible. Ainsi : $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$.
- $I_n \in \mathcal{O}(n)$
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit.
  Autrement dit : le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable par passage à l'inverse.
  Autrement dit : une matrice orthogonale est inversible et son inverse est orthogonale

Proposition 5 Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut :
Par conséquent le déterminant d'une isométrie vectorielle vaut :

Définition 5

- **Isométries vectorielles directes, indirectes.**
  On appelle isométrie vectorielle directe toute isométrie vectorielle dont le déterminant vaut 1.
  On appelle isométrie vectorielle indirecte toute isométrie vectorielle dont le déterminant vaut -1.
  On appelle "groupe spécial orthogonal de E", et on note $SO(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles directes de E.
- **Matrices orthogonales directes, indirectes.**
  On apppelle matrice orthogonale directe toute matrice orthogonale dont le déterminant vaut $+1$.
  On appelle matrice orthogonale indirecte toute matrice orthogonale dont le déterminant vaut -1.
  On appelle "groupe spécial orthogonal de $\mathbb{R}^n$" (ou de degré n sur $\mathbb{R}$), et on note $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$, l'ensemble des matrices orthogonales directes de taille n.

Théorème 6 Groupe spécial orthogonal.

- $\mathcal{SO}(E) \subset \mathcal{O}(E) \subset \mathcal{G}\ell(E)$.
  De plus $\mathcal{SO}(E)$ contient Id_E, $\mathcal{SO}(E)$ est stable par multiplication et par passage à l'inverse.
- $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$.
  De plus $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ contient I_n, $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est stable par multiplication et par passage à l'inverse.

Bases orthonormées directes.
Rappel : Soit $\mathcal{B}_0$ une base de référence (définissant l'orientation de E).
Si $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1) > 0$, on dit que $\mathcal{B}_1$ est directe.
Si $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1) < 0$, on dit que $\mathcal{B}_1$ est indirecte.
Une base est dite "orthonormée directe" lorsqu'elle est à la fois orthonormée et directe.

Exemple 4 On suppose avoir choisi une orientation de E, espace euclidien de dimension n.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe.
   Montrer que : $u \in \mathcal{SO}(E) \iff u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée directe.
2. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base orthonormée directe de E et soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
   Montrer que : $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n)$.

III Isométries vectorielles d'un plan euclidien

III.1 Matrices orthogonales de taille 2

Proposition 6 (Matrices orthogonales de taille 2 (dem)) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$.

- $A \in \mathcal{SO}(2)$ si et seulement si : $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
- $A \in \mathcal{O}(2)$ et $A \notin \mathcal{SO}(2)$ si et seulement si : $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Définition 6 Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle « matrice de rotation d'angle θ » la matrice

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proposition 7 (Propriété) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors : } \forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1).$$

III.2 Isométries directes d'un espace de dimension 2

Théorème 7 (Isométries directes d'un espace de dimension 2. (dem))
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E et soit u un endomorphisme de E.

$$u \in \mathcal{SO}(E) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)$$

Le réel θ, unique à 2π près, ne dépend pas de la base orthonormée directe $\mathcal{B}$.

Définition 7 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et soit $u \in \mathcal{SO}(E)$.
Alors on dit que « u est la rotation d'angle θ » si θ est l'unique réel (modulo 2π) tel que la matrice de u dans toute base orthonormée directe soit $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
θ est appelé angle de la rotation u.

Remarque 6 (Représentation complexe d'une rotation.(dem))
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée directe de E.
A tout vecteur $u = xe_1 + ye_2$, on associe son affixe $z = x + iy$.
L'image du vecteur u par la rotation d'angle θ est le vecteur d'affixe $z' = e^{i\theta} z$.

Proposition 8 (Propriétés. (dem)) Notons $r(\theta)$ la rotation vectorielle d'angle θ. Alors :
- $r(\theta_1) \circ r(\theta_2) = r(\theta_2) \circ r(\theta_1) = r(\theta_1 + \theta_2)$
- $r(\theta_1)$ est bijective et $(r(\theta_1))^{-1} = r(-\theta_1)$

III.3 Angle de deux vecteurs

Proposition 9 (Résultat préliminaire.(dem)) Soient u et v deux vecteurs unitaires d'un espace euclidien de dimension 2. Il existe une unique rotation r telle que $r(u) = v$.

Définition 8 (Angle de deux vecteurs)
Soient U et V deux vecteurs non nuls. On pose $u = \dfrac{U}{\|U\|}$ et $v = \dfrac{V}{\|V\|}$.
On définit alors l'angle orienté de U et V, noté $\widehat{(U,V)}$ comme l'angle de l'unique rotation r vérifiant $r(u) = v$.

Proposition 10 (Propriétés.) Les propriétés des rotations permettent de montrer que :
- $\widehat{(U,W)} \equiv \widehat{(U,V)} + \widehat{(V,W)}[2\pi]$. (Chasles)
- $\widehat{(V,U)} \equiv -\widehat{(U,V)}[2\pi]$.
- $\widehat{(U,-V)} \equiv \widehat{(U,V)} + \pi[2\pi]$

Proposition 11 (Détermination (pratique) de $\widehat{(U,V)}$.)
Si on note θ une mesure de $\widehat{(U,V)}$, et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E, on a alors :

$$\langle U, V\rangle = \|U\|.\|V\|\cos(\theta) \text{ et } det_{\mathcal{B}}(U,V) = \|U\|.\|V\|\sin(\theta)$$

Remarque 7 Si r est une rotation d'angle θ alors $\mathrm{Tr}(r) = 2\cos(\theta)$.
De plus, si u est un vecteur unitaire de E, alors $\cos(\theta) = \langle u, r(u)\rangle$ et $\sin(\theta) = det(u, r(u))$.

III.3.a Isométries indirectes d'un espace de dimension 2

Proposition 12 (Isométries indirectes d'un espace de dimension 2)
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée directe de E et soit u un endomorphisme de E.
- u est une isométrie indirecte $\iff$ $\exists \theta \in \mathbb{R},\quad M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$
- Si tel est le cas, alors u est une réflexion par rapport à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ où $x = \cos(\theta/2)e_1 + \sin(\theta/2)e_2$.

Remarque 8 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2.
La composée de deux réflexions de E est une rotation de E.
~~Toute rotation peut être vue comme la composée de deux réflexions.~~

IV Endomorphismes autoadjoints

IV.1 Généralités

Définition 9 (Endomorphisme autoadjoint (ou symétrique))
Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E.
f est dit autoadjoint (ou symétrique) lorsque : $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$

Proposition 13
L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Il est noté $\mathcal{S}(E)$.

Proposition 14 (Caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoints. (dem))
Soit f un endomorphisme d'une espace euclidien E. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors :

$$f \text{ est autoadjoint} \iff \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) \text{ est une matrice symétrique.}$$

Proposition 15 (projecteur, symétrie et endomorphismes autoadjoints. (dem))

- Soit p un projecteur d'un espace euclidien.
  Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est autoadjoint.
- Soit s une symétrie d'un espace euclidien.
  Alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est autoadjoint.

Proposition 16 (Caractérisation matricielle des symétries orthogonales.(dem))
Soit s un endomorphisme de E, et soit B une base orthonormée . Alors :

$$s \text{ est une symétrie orthogonale de } E \iff \text{la matrice } \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(s) \text{ est symétrique et orthogonale.}$$

Exemple 5 Donner un exemple de matrice de symétrie orthogonale dans $E = \mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire canonique et de la base canonique).

IV.2 Réduction des endomorphismes autoadjoints

Proposition 17 (Propriétés) Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E.
- Le polynome caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{R}$.
- Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.
- Si F est un sous-espace stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.
- Les endomorphismes induits par f sur F et $F^\perp$ sont autoadjoints

Proposition 18 (Theorème spectral) Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien.
Alors f est diagonalisable dans une base orthonormée de E.
Autrement dit : il existe une base orthonormée de E, formée de vecteurs propres de f.

Proposition 19 (Version matricielle) Soit A une matrice symétrique $\boxed{\textbf{réelle}}$.
Alors il existe une matrice diagonale (réelle) D et une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = D$.

Remarque 9 **ATTENTION** : une matrice symétrique complexe n'est pas toujours diagonalisable.
Considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$. Elle est bien symétrique. Est-elle diagonalisable ?

Exemple 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A.

Exemple 7 Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit A la matrice qui contient des 1 sur la diagonale, des a juste au dessus et juste en dessous de la diagonale, et des 0 partout ailleurs :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a & 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & a & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}$$

Justifier que A est diagonalisable. Diagonaliser A lorsque $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

IV.3 Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif

Définition 10 Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E.
- f est dit « positif » lorsque : $\forall x \in E,\ \langle f(x), x\rangle \geqslant 0$.
  On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E.
- f est dit « défini positif » lorsque : $\forall x \in E,\ x \neq 0 \Rightarrow \langle f(x), x\rangle > 0$.
  On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs de E.

Définition 11 Soit A une matrice symétrique réelle.
- A est positive si : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T AX \geqslant 0$.
  On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives.
- A est définie positive si : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0,\ X^T AX > 0$.
  On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

Proposition 20 (Caractérisation des endomorphismes autoadjoints positifs)
Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E.
- f est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
- f est défini positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives .