

1 Exercices pour les TD

***Exercice 1** Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que : $\forall \vec{x} \in E, \|f(\vec{x})\| = \|g(\vec{x})\|$.

Montrer que $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle g(\vec{x}), g(\vec{y}) \rangle$

***Exercice 2** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $N(x, y) = \sqrt{x^2 + 2xy + 3y^2}$.

Montrer que N définit une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ (penser aux identités de polarisation).

****♡Exercice 3** On considère $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{telles que la série } \sum u_n^2 \text{ converge}\}$.

1. Pour x et y réels, montrer que $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. Montrer que, si (u_n) et (v_n) sont des éléments de E , alors la série $\sum u_n v_n$ converge absolument.
3. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
4. Montrer que Φ définie sur $E \times E$ par $\Phi((u_n), (v_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur E .

♡Exercice 4** Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la trace d'une matrice $M = [a_{ij}]$ par $Tr(M) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Soit $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \rightarrow Tr({}^t A \cdot B)$.

1. Montrer que Φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ce produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Exprimer $\Phi(A, B)$ en fonction des coefficients des matrices A et B . En déduire une base de E qui soit orthonormale pour ce produit scalaire.

2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq n \times \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$. Cas d'égalité ?
3. Soit F le sous-espace vectoriel des matrices symétriques. Déterminer l'orthogonal de F .
4. Soient A et B deux matrices de E . Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
5. Démontrer que : $\forall A \in E, Tr(A) \leq \sqrt{n Tr({}^t A \cdot A)}$.

****♡Exercice 5** Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $]a, b[\subset \mathbb{R}$ (on suppose $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$).

1. Montrer que l'application Φ_1 de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(P, Q) = \int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est un produit scalaire sur E .
2. Montrer que l'application Φ_2 de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ est un produit scalaire sur E .
3. Soit ω une fonction continue sur $]a, b[$, à valeurs strictement positives, telle que, pour tout entier naturel n , l'intégrale $\int_a^b t^n \omega(t) dt$ soit convergente.

Montrer que l'application Φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(P, Q) = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t) dt$ est un produit scalaire sur E .

****Exercice 6** Sur l'espace $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles, on définit :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad (f|g) = \int_0^1 t^n f(t)g(t)dt \text{ où } n \text{ est un entier naturel fixé non nul.}$$

1. Justifier que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur E .
2. On pose, pour tout $t \in [0, 1]$: $h_n(t) = nt^n \sqrt{1-t^2}$.
Soit t un réel fixé, $t \in [0, 1]$. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t)$?
3. On désigne par M_n le maximum de h_n sur l'intervalle $[0, 1]$: $M_n = \text{Max}\{h_n(t), t \in [0, 1]\}$.
Calculer M_n puis calculer un équivalent simple de M_n lorsque n tend vers $+\infty$ (on a $M_n \sim C.n^\alpha$ où C et α sont des constantes à déterminer). En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.
4. Rappeler, sans preuve, l'inégalité de Cauchy-Schwarz (dans un espace vectoriel F quelconque, muni d'un produit scalaire).
5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(t)dt = 0$.

***♡Exercice 7** Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}, (P, Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur E .
2. Déterminer une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) de E pour φ , telle que $\deg(P_i) = i$.
3. Déterminer une base orthonormale (Q_0, Q_1, Q_2) de E pour φ , telle que $\deg(Q_i) = 2$.

***Exercice 8** Pour tout (x, y, z) et tout (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$, on pose :

$$\langle (x, y, z) | (x', y', z') \rangle = xx' + (x+y)(x'+y') + (x+y+z)(x'+y'+z').$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer une B.O.N. de $\mathbb{R}^3$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

***Exercice 9** On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$. Donner une base orthonormée de H .

***Exercice 10** On se place dans $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$) muni de son produit scalaire usuel.

Trouver une base orthonormale de $F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$.

***Exercice 11** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tous polynômes $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ appartenant à E , on définit : $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Soit $F = \{P \in E / P(0) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.
3. On suppose $n = 5$ et on note $G = \text{Vect}(X^2(X-1), X^3, X^4)$. Déterminer $G^\perp$.

***Exercice 12** Soit $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par : $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$.

On pose $F = \{f \in E / \forall t \in [-1, 0], f(t) = 0\}$ et $G = \{g \in E / \forall t \in [0, 1], g(t) = 0\}$.

1. Montrer que $F^\perp = G$.
2. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 13 Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $H = \{P \in E, P(1) = 0\}$. On munit E du produit scalaire défini par

$$\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

1. Donner la dimension et une base de H .
2. Déterminer le projeté orthogonal de P sur H .

*****Exercice 14** **Polynômes de Legendre.** Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \frac{1}{2^n \times n!} Q_n^{(n)}$ avec $Q_n = (X^2 - 1)^n$.

1. Vérifier que le produit scalaire « annoncé » est bien un produit scalaire...
2. Calculer le degré et le coefficient dominant de P_n .
3. Etudier la parité de P_n .
4. Montrer que $(P_k)_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. En appliquant la formule de Leibniz, montrer que $P_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k} (X-1)^k$.
En déduire $P_n(1)$ et $P_n(-1)$. Calculer $P_n(0)$.
6. Montrer que la famille $(P_k)_{k=0..n}$ est une famille orthogonale.
7. On admet le résultat suivant : $\int_0^{\pi/2} \cos^{2k+1}(t)dt = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$ (intégrale de Wallis...)
Calculer $\|P_n\|$.

****Exercice 15** **Polynômes de Lagrange.** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Soient $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

1. Montrer que l'application $\left((P, Q) \longrightarrow \sum_{i=0}^n P(x_i)Q(x_i) \right)$ définit un produit scalaire que l'on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
2. Pour $i = 0, \dots, n$, on note L_i le polynôme $L_i = \prod_{j=0..n, j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormale de E .
Soit $P \in E$. Comment calculer les coordonnées de P dans cette base ?
3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([x_0, x_n], \mathbb{R})$. On appelle polynôme de Lagrange de f relativement aux points $x_0, \dots, x_n$ le polynôme $P_f = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i$.
Vérifier que $P_f \in E$. Puis montrer que si p est un entier fixé appartenant à $\{1, \dots, \deg(P_f)\}$, il existe un unique polynôme noté S de degré inférieur ou égal à p tel que $\sum_{k=0}^n (S(x_k) - f(x_k))^2$ soit minimal.

♡Exercice 16** Soit E un espace vectoriel euclidien et p un projecteur de E . Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

(Pour la réciproque, considérer $x \in \text{Ker}(p)$, $y \in \text{Im}(p)$ puis utiliser le minimum de l'application $t \mapsto \|y + tx\|^2$.)

♡Exercice 17** Déterminer $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (t - a \cos(t) - b \sin(t))^2 dt$.

*♡**Exercice 18** Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. On identifiera $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On suppose $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. Déterminer X dans $\mathbb{R}^3$ tel que $\|AX - B\|$ soit minimale.

2 Exercices issus de la banque CCIP

Exercice 19 (Algebre ex 76) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$.
Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

Exercice 20 (Algebre ex 79) Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.
Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 21 (Algebre ex 80) Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.