1 Exercices pour les TD

1.1 Isométries vectorielles, matrices orthogonales

Exercice 1 Déterminer toutes les matrices qui sont à la fois orthogonales et triangulaires.

Exercice 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est une reflexion, dont on précisera le plan invariant.

Exercice 3 Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement :

$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Montrer que f et g sont des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$, et préciser leurs éléments géométriques.

Exercice 4 Soit P un plan euclidien orienté, muni d'une base orthonormée directe B.
Soit r une rotation vectorielle plane et a un vecteur unitaire de P.

1. Calculer le cosinus et le sinus de l'angle θ de la rotation r en fonction de a et de $r(a)$.
2. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{(u,v)}$ lorsque $u = (-2, 1)$ et $v = (1, 3)$ dans B.

Exercice 5 Dans un plan euclidien on considère ρ une rotation et σ une réflexion (symétrie orthogonale par rapport à une droite).
Montrer que $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}$

Exercice 6
On considère $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire habituel, et F l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ et $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$.

1. Donner la dimension de F.
2. Soit s_F la symétrie orthogonale par rapport à F. Trouver une base orthonormée (v_1, v_2, w_1, w_2) de $\mathbb{R}^4$ telle que $s_F(x) = \langle v_1, x\rangle v_1 + \langle v_2, x\rangle v_2 - \langle w_1, x\rangle w_1 - \langle w_2, x\rangle w_2$.
3. Écrire la matrice de s_F dans la base canonique.

1.2 Endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques

Exercice 7

1. Une symétrie est-elle un endomorphisme autoadjoint ?
2. Une projection orthogonale est-elle un endomorphisme orthogonal ?
3. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales et symétriques ?
4. Quelles sont les matrices de $O_3(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables ?

Exercice 8 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que ${}^tAA = A\,{}^tA$. Que dire de ${}^tAA$? Déterminer A.

Exercice 9 Soit a, b deux vecteurs libres d'un espace euclidien E. On définit sur E l'application

$$u : x \mapsto (a|x)b + (b|x)a.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.
2. Préciser son noyau.
3. Trouver ses valeurs propres.

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, dont tous les coefficients diagonaux D_{ii} sont positifs. Soit $H \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

   Montrer que $\mathrm{Tr}(DH) \leqslant \mathrm{Tr}(D)$.
2. Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(PM) \leqslant \mathrm{Tr}(M)$.

Exercice 11 Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose
$\Phi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 t^k P(t)dt \right) X^k$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\ker \Phi$.
2. Écrire la matrice M de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier que M est diagonalisable.
3. Soit $U = {}^t(u_0, \ldots, u_n) \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$ {}^tUMU = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} u_k t^k \right)^2 dt. $$

   En déduire que toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.
4. Montrer que la plus petite valeur propre de M tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Exercice 12 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.

1. Montrer que A définit un projecteur orthogonal.
2. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $\mathrm{Tr}(M^T M)$ en fonction des coefficients de M.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{\mathrm{rg}(A)}$.

Exercice 13
Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $C = AB + BA$.

1. Montrer que $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose que $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 14 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^T A$ est diagonalisable.
2. Soit λ une valeur propre de $A^T A$. Montrer que λ est positive.
3. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la liste des valeurs propres de $A^T A$. En notant $a_{i,j}$ les coefficients de la matrice A, montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Exercice 15 Soient E un espace vectoriel euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Déterminer $\mathrm{Tr}(f)$ en fonction des e_i et des $f(e_i)$.
2. On suppose f et g autoadjoints positifs). Montrer que $\mathrm{Tr}(f \circ g) \geqslant 0$.

Exercice 16 Endomorphismes antisymétriques.
Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   - $\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$
   - $\forall x \in E, \quad \langle f(x), x\rangle = 0$

   Un endomorphisme antisymétrique est un endomorphisme vérifiant l'un de ces conditions.
2. Soit B une base orthonormée de E. On note A la matrice de f dans la base B.
   Donner une condtion nécessaire et suffisante sur A pour que f soit antisymétrique.
3. On suppose que f est antisymétrique. Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont des sous espaces supplémentaires orthogonaux.

   Dans la suite de l'exercice, on suppose que f est antisymétrique.
4. Montrer que l'endomorphisme $\quad s = f^2$ est symétrique.
5. Soit a une valeur propre non nulle de s et x un vecteur propre associé.
   Montrer que $a < 0$ et que le sous espace $P = vect(x, f(x))$ est stable par f et que son orthogonal $F = P^{\perp}$ l'est aussi.
   Quelle est la matrice de l'endomorphisme induit par f sur le plan P dans une base orthonormée de P ?
6. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, les blocs étant :
   - un bloc nul (de taille quelconque.
   - des blocs de taille 2 de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}$

2 Exercices issus de la banque CCINP

1. **(Algebre ex68)**
   Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
      i. sans calcul,
      ii. en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
      iii. en utilisant le rang de la matrice,
      iv. en calculant A^2.

   (b) On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.
      Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

2. **(Algebre ex 76)** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
   On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
   (a) i. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
      ii. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

   (b) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.
      Prouver que l'ensemble $\left\{ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

3. **(Algebre ex 77)** Soit E un espace euclidien.

   (a) Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.

   (b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

      i. Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

      ii. Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

4. **(Algebre ex 78)** Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

   (a) Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.

      i. Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2 \; (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

      ii. Démontrer que u est bijectif.

   (b) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.

   (c) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

5. **(Algebre ex 79)** Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

   (a) Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.

   (b) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

   (c) Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

6. **(Algebre ex 80)** Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   (a) Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

   (b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

7. **(Algebre ex 81)** On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$, où $\mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

   (a) Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.

   (c) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.

   (d) Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

8. **(Algebre ex 82)** Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

   On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
   Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\left(A \mid A'\right) = aa' + bb' + cc' + dd'$.

   (a) Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

9. **(Algebre ex 92)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
   On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A\,, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

   (a) Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

   (b) On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

      i. Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

      ii. Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.

   (c) Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^\perp$.