Déroulement : La colle comporte :

- **Pour les 3/2** : une question de cours suivie de un ou deux exercices sur les chapitres au programme. Une question de cours (cf ci-dessous) peut être complétée par des formules ou théorèmes à énoncer précisement.
- **Pour les 5/2** : la question de cours peut être remplacée par un exercice suivants de la **banque CCINP : algèbre, exercice 76 ou 79 ou 80**

I : Compléments sur les variables aléatoires réelles discrètes : exercices

Voir le programme de la semaine 13

II : Espaces préhilbertiens : révisions du programme de PCSI

a) Produit scalaire Produit scalaire. Notations $\langle x, y\rangle$, $(x|y)$, $x \cdot y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien.
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Expression $X^\top Y$.
Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.
b) Norme associée à un produit scalaire Norme associée à un produit scalaire, distance.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Exemples : sommes finies, intégrales.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.
Identité remarquable $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$. Formule de polarisation associée.
c) Orthogonalité Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie. Notation $X^\perp$.
L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel.
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
d) Bases orthonormées Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F. En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan.
Distance d'un vecteur à F. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F. Notation $d(x, F)$.

III : Questions de cours

- Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.
- $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.
- $\mathrm{E}(X) = G_X'(1)$ (admis dans le cas général, démontré dans le cas où le rayon de convergence est strictement supérieur à 1). Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\mathrm{V}(X)$ en fonction de $G_X'(1)$ et de $G_X''(1)$ en cas d'existence (en paticulier lorsque le rayon de convergence est strictement supérieur à 1).
- Série génératrice de la loi binomiale.
- Espérance et variance de la loi géométrique, de la loi de Poisson.
- Les étudiants doivent être capables de donner divers exemples de produits scalaires (en dehors du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$)
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.
- Identités de polarisation.
- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires.
- Savoir mettre en oeuvre le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur une famille libre de cardinal 3 sans problème....