

## I : Exercices pour les TD

**Exercice 1** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x > 0$ , on pose  $f_n(x) = \frac{\ln(1 + \frac{x}{n})}{x(1 + x^2)}$ .

1. Etudier l'intégrabilité de  $f_n$ .

2. On pose  $u_n = n \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ .

Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$  et donner sa limite.

**Exercice 2** Déterminer les limites de  $(I_n)$  dans les deux cas suivants :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n} dx \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)^{\frac{1}{n}}}$$

**Exercice 3** Soit  $f$  une fonction continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^{2n} f(t) dt$ .

Justifier l'existence de  $I_n$ .

Déterminer la limite de  $I_n$  sous la forme d'une intégrale faisant intervenir  $f$ .

**Exercice 4**  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(n+x)}{\sqrt{x(n+x)}} dx$

1. Etudier la convergence de l'intégrale généralisée  $I_n$ .

2. Montrer que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

3. A l'aide d'un changement de variable, calculer  $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(n+x)}} dx$ .

Encadrer alors  $I_n$  puis donner un équivalent de  $I_n$ .

**Exercice 5** Montrer que  $\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t^2 e^{-nt} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$

**Exercice 6** Dans cet exercice, on admet que  $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. Montrer que l'intégrale généralisée  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$  et la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  convergent.

2. Ecrire  $\frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$  sous la forme d'une série.

3. Calculer la valeur de  $\int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-nt} dt$  puis démontrer que  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

**Exercice 7** Soient  $p$  et  $q$  deux réels strictement positifs. Montrer que  $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kq+p}$ .

**Exercice 8** Soit  $\sum a_n$  une série de réels absolument convergente.

1. Montrer que pour tout entier  $n$ , la fonction  $f_n : x \mapsto x^n e^{-x}$  est intégrable et déterminer la valeur de  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ .

2. On pose  $u_n(x) = \frac{a_n x^n}{n!}$ . Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge simplement vers une fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$ .

3. Montrer que la fonction  $g : x \mapsto f(x) e^{-x}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et que  $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

**Exercice 9** Montrer que  $\int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-nt} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

**Exercice 10**  $\forall t > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n(t) = \frac{(-1)^n}{1+n^2 t^2}$

1. Montrer que  $S : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$  est définie et continue sur  $]0, +\infty[$ .

2. Montrer que  $S$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

3. Quelle est la nature de la série  $\sum \int |u_n|$  ?

4. On note  $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(t)$ .

Montrer que  $R_n$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , et déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} R_n(t) dt$ .

5. Calculer  $\int_0^{+\infty} S(t) dt$ .

**Exercice 11** (CCP) Pour  $x \geq 0$  et  $t \in [0, 1]$ , on pose  $g(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$  et  $f(x) = \int_0^1 g(x, t) dt$

On note aussi  $h(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est bien définie sur  $[0, +\infty[$ .

Soit  $a > 0$ . Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, a]$  et calculer  $f'(x)$ .

En déduire que  $f$  est  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$ .

2. Montrer que  $h$  est définie et  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$ .

3. Montrer que  $f + h^2$  est une fonction constante sur  $[0, +\infty[$ , et déterminer cette constante.

4. A l'aide d'une majoration, déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en déduire la valeur de  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

**Exercice 12** (CCP) Soit  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$ .

1. Montrer que le domaine de définition de  $F$  est  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Montrer que  $F$  est positive et décroissante.

3. Montrer que pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $F(x) \leq \int_0^{+\infty} \exp(-xt) dt$ . En déduire la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

4. Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  et que  $F(x) - F'(x) = \frac{1}{x}$ . En déduire que  $F$  est de classe  $C^{+\infty}$ .

5. Montrer que pour  $x > 0$ ,  $F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ . En déduire la limite de  $F$  en  $0^+$ .

6. Montrer que  $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$ .

**Exercice 13** (CCP) Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt$ .

1. Montrer que  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) + F(-x) = 1$ . Calculer  $F(k)$  pour  $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .
2. Déterminer les limites de  $F$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .  
Donner un équivalent de  $F(x) - 1$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
3. Montrer que  $F$  est convexe sur  $\mathbb{R}_-$  et concave sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Rappels du programme de 1ère année** (qui doit vous inciter à retourner voir votre cours si vous n'en avez aucun souvenir...)

**Définition d'une fonction convexe** : La fonction  $f$  est convexe sur  $I$  si, pour tous  $(x, y) \in I^2$  et  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ .

Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, et position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.

Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables :  $f'' \geq 0$ .

Exemples d'inégalités de convexité.

**Exercice 14**  $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t} \sqrt{1+x^2 e^{2t}} dt$

1. Domaine de définition, parité et valeur en 0 de  $f$  ?
2. Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a :  $x e^t \leq \sqrt{1+x^2 e^{2t}} \leq x e^t + \frac{e^{-t}}{2x}$ .  
En déduire que pour tout  $x > 0$ , on a :  $x \leq f(x) \leq x + \frac{1}{6x}$ .  
Quelle est la nature de la branche infinie de  $C_f$  en  $+\infty$  ?
3. (a) Soit  $x > 0$ . En effectuant le changement de variable  $u = x e^t$ , déterminer une nouvelle expression de  $f(x)$ . Faire de même pour  $f'(x)$ .  
(b) Montrer que  $f$  est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.  
(c) Montrer que pour  $x > 0$ , on a :  
$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}} du = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$$
  
Montrer que  $u \mapsto \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$   
(d) En déduire un équivalent de  $f'(x)$  puis de  $f(x) - \frac{1}{2}$  au voisinage de 0.

**Exercice 15** Transformée de Laplace (extrait E3A. PC. 2010)

$E$  désigne l'ensemble des fonctions  $f$  définies et continues sur  $[0, +\infty[$ , à valeurs réelles telles que :

Il existe  $A > 0$ ,  $C > 0$  et un entier  $n$  tels que  $\forall t \geq A, |f(t)| \leq C t^n$

1. Pour tout entier  $n$  et pour tout réel  $x > 0$ , on considère l'intégrale généralisée  $I_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt$ .  
Montrer, par récurrence que pour tout entier  $n$ , l'intégrale  $I_n(x)$  converge et  $I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$ .
2. Soit  $f \in E$ . Soit  $x$  un réel strictement positif. Montrer que  $t \mapsto f(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .  
Dans toute la suite de l'exercice, on note  $L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ .  
Montrer que  $L(f)$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .
3. Soit  $f \in E$ . On considère des réels  $A > 0$ ,  $C > 0$  et un entier  $n$  tels que  $|f(t)| \leq C t^n$  pour  $t \geq A$ .
  - Montrer que pour tout réel  $x > 0$ , on a  $|L(f)(x)| \leq \int_0^A |f(t)e^{-xt}| dt + C \frac{n!}{x^{n+1}}$ .
  - Montrer que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^A |f(t)e^{-xt}| dt = 0$
  - En déduire la limite en  $+\infty$  de  $L(f)(x)$ .

**Exercice 16 Fonction Gamma.**  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

1. Montrer que la fonction  $\Gamma$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .  
Montrer que pour réel  $x > 0$ , on a :  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .  
En déduire la valeur de  $\Gamma(n)$  pour tout entier  $n$  non nul.
2. Montrer que  $\Gamma$  est continue sur son ensemble de définition.
3. Montrer que  $\Gamma$  est de classe  $C^\infty$  sur son ensemble de définition, et exprimer sa dérivée à l'aide d'une intégrale.

## II : Exercices issus de la banque CCINP

### 1. (ex 25, Analyse)

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### 2. (ex 26, Analyse)

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ .

- (a) Justifier que  $I_n$  est bien définie.
- (b) i. Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .  
ii. Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- (c) La série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$  est-elle convergente ?

### 3. (ex 27, Analyse)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2 x^2}$  et  $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

- (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$ .
- (b) Soit  $a \in ]0, 1[$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[a, 1]$  ?
- (c) La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, 1]$  ?
- (d) Trouver la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

### 4. (ex 29, Analyse)

On pose :  $\forall x \in ]0, +\infty[, \forall t \in ]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$ .

(a) Démontrer que :  $\forall x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

On pose alors :  $\forall x \in ]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ .

- (b) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , exprimer  $\Gamma(x+1)$  en fonction de  $\Gamma(x)$ .
- (c) Démontrer que  $\Gamma$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et exprimer  $\Gamma'(x)$  sous forme d'intégrale.

### 5. (ex 30, Analyse)

(a) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

(b) Démontrer que la fonction  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

- (c) i. Trouver une équation différentielle linéaire  $(E)$  d'ordre 1 dont  $f$  est solution.  
ii. Résoudre  $(E)$ .