

Déroulement : La colle comporte :

- **Pour les 3/2** : une question de cours suivie de un ou deux exercices sur les chapitres au programme. Une question de cours (cf ci-dessous) peut être complétée par des formules ou théorèmes à énoncer précisément.
- **Pour les 5/2** : la question de cours peut être remplacée par un exercice suivants de la **banque CCINP : algèbre, exercice 68 ou 79 ou 80 ou 81**

I : Espaces préhilbertiens : révisions du programme de PCSI

Voir le programme précédent.

II : Endomorphismes des espaces euclidiens

a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée. Exemples : symétries orthogonales, réflexions.

Groupe orthogonal : inclus dans le groupe linéaire $\mathcal{GL}(E)$, contient Id_E , stable par composition et passage à l'inverse. Notation $\text{O}(E)$.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.

b) Matrices orthogonales

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^T A = I_n$. Interprétation en termes de colonnes et de lignes.

Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.

Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.

On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ».

Groupe orthogonal : inclus dans le groupe linéaire $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, contient I_n , stable par composition et passage à l'inverse. Notations $\text{O}_n(\mathbb{R})$, $\text{O}(n)$.

Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Notations $\text{SO}_n(\mathbb{R})$, $\text{SO}(n)$.

Orientation. Bases orthonormées directes.

c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Description des matrices de $\text{O}_2(\mathbb{R})$, de $\text{SO}_2(\mathbb{R})$. Commutativité de $\text{SO}_2(\mathbb{R})$.

Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté. On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.

Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.

d) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Notation $\mathcal{S}(E)$.

Caractérisation des projecteurs orthogonaux.

Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.

On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ».

Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Forme matricielle du théorème spectral.

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Caractérisation spectrale (*i.e.* à l'aide du spectre). Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$.

Matrice symétrique positive, définie positive. Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

III : Questions de cours

- Les étudiants doivent être capables de donner divers exemples de produits scalaires (en dehors du produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n)
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.
- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et F^\perp sont supplémentaires.
- Savoir mettre en oeuvre le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur une famille libre de cardinal 3...
- Définition et caractérisations d'une isométrie vectorielle (dem)
- Définition et caractérisations des matrices orthogonales (dem)
- Déterminant d'une matrice orthogonale (dem), groupe spécial orthogonal (énoncé)
- Changement de bases orthonormées et matrice de passage orthogonale (dem)
- Description des matrices orthogonales de taille 2 (énoncé) Description des isométries directes et indirectes d'un espace euclidien de dimension 2 (énoncé)
- Endomorphismes auto-adjoints : définition, caractérisation matricielle (dem)
- Propriétés sur les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint (dem)
- Endomorphismes autoadjoint positif, défini positif : définition et caractérisation (dem)