 Programme de colle. Semaine n°17 : du 12/02 au 16/02/2024.

Déroulement : La colle comporte cette semaine pour tout le monde une (ou plusieurs) question(s) de cours, suivi(e)s de un ou deux exercices.

I : Endomorphismes des espaces euclidiens : Voir le programme précédent

II : Compléments sur l'intégration

1) Suites et séries de fonctions intégrables *Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.*

Théorème de convergence dominée : si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et : $\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème d'intégration terme à terme : si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I, et si la série $\displaystyle\sum \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et de plus : $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$. *On peut rencontrer des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.*

2) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans nécessairement expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Théorème de continuité : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A\times I$, telle que :

- pour tout $t\in I$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- pour tout $x\in A$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t)\in A\times I$, on ait $|f(x,t)|\leqslant\varphi(t)$;

alors la fonction $x\mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et f une fonction définie sur $A\times I$ telle que :

- pour tout $t\in I$, $f(x,t)\xrightarrow[x\to a]{}\ell(t)$;
- pour tout $x\in A$, $t\mapsto f(x,t)$ et $t\mapsto\ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t)\in A\times I$, on ait $|f(x,t)|\leqslant\varphi(t)$;

alors $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème de dérivation : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A\times I$, telle que :

- pour tout $t\in I$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x\in A$, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x\in A$, $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t)\in A\times I$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t)$;

alors la fonction $g : x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $\forall x\in A,\quad g'(x)=\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation. Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $t\mapsto\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $t\mapsto\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ pour $0\leqslant j<k$.

III : Questions de cours

- Savoir mettre en oeuvre le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur une famille libre de cardinal 3....
- Définition et caractérisations d'une isométrie vectorielle (dem)
- Définition et caractérisations des matrices orthogonales (dem)
- Changement de bases orthonormées et matrice de passage orthogonale (dem)
- Description des matrices orthogonales de taille 2 (énoncé)
- Endomorphismes auto-adjoints : définition, caractérisation matricielle (dem)
- Propriétés sur les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint (dem)
- Théorème spectral (énoncé)
- Endomorphismes autoadjoint positif, défini positif : definition et caractérisation (dem)
- Théorème de convergence dominée (pour les suites d'intégrales) (énoncé)
- Théorème d'intégration terme à terme (pour les intégrales de séries de fonctions) (énoncé)
- Continuité de $x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)dt$ (énoncé) ou Dérivabilité de $x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)dt$ (énoncé) ou Caractère C^k de $x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)dt$ (énoncé)