Table des matières

ESPACES VECTORIELS NORMES

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Normes sur un espace vectoriel

I.1 Norme et distance

Définition 1 (Norme)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :
- $\forall x \in E$, $N(x) \geqslant 0$ et $N(x) = 0 \iff x = 0$.
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
- $\forall (x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire)

Notation : $\|x\| = N(x)$
Un vecteur x de E est dit unitaire si sa norme $\|x\| = 1$.

Exemple 1 Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire $<,>$, on définit la norme associée au produit scalaire en posant $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.
Dans ce cas particulier, on dispose de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$\forall (x, y) \in E^2$, $| < x, y > | \leqslant \|x\|.\|y\|$

Exemple 2 Si $E = \mathbb{R}$, la fonction valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3 Si $E = \mathbb{C}$, la fonction $z \mapsto |z|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.

Proposition 1 (Une deuxieme inégalité triangulaire)
Dans un espace vectoriel normé, on a, pour tous (x, y) de E^2 :

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$$

Définition 2 (Distance associée à une norme) Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$. La distance associée à cette norme est l'application

$$\begin{cases} E \times E \to \mathbb{R}^+ \\ (x,y) \mapsto d(x,y) = \|x-y\| \end{cases}$$

Proposition 2 Les propriétés de la norme donnent :

- $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = d(y,x)$
- $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$ $\forall (x,y,z) \in E^3$, $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

I.2 Normes usuelles.

Exemple 4 (Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.) $\forall x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$

Exemple 5 (Norme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$.) $\forall x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{C}^n$, $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}$
Vérifier que c'est une norme.

Exemple 6 (La norme $\|.\|_1$ sur $\mathbb{K}^n$.) $\forall x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|$

Exemple 7 (La norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.) $\forall x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, ..., |x_n|)$

Exemple 8 (Une norme sur $M_n(\mathbb{K})$.) $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\quad \|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^T A)}$.

I.3 Normes dans un espace de fonction

Exemple 9 (Norme uniforme)
Ici, E désigne l'ensemble des fonctions bornées d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in I}\{|f(t)|\}$$

$\|.\|_\infty$ est appelée norme uniforme ou aussi norme infini.

Exemple 10 (Norme de la convergence en moyenne)
Ici, E désigne l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et intégrables.

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_I |f(t)|dt$$

Exemple 11 Ici, E désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Vérifier que $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.
Quelle est la norme associée ?

II Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

Définition 3 (Convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé)
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et soit $\ell \in E$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si suite numérique $d(x_n, \ell)$ tend vers 0, lorsque n tend vers ∞.

$$\left(x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell\right) \iff \left(\lim_{n\to\infty} d(x_n,\ell)=0\right) \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0 \quad d(x_n,\ell) \leqslant \varepsilon)$$

Une suite est dite **convergente** lorsqu'un tel ℓ existe.

Proposition 3 (Unicité de la limite)
Soit (x_n) une suite à valeurs dans E, on note ℓ_1 et ℓ_2 deux éléments de E.
Si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$

Conséquence : Lorsqu'une suite admet une limite, on peut alors parler de $\boxed{\textbf{la}}$ limite de la suite et on note :

$$\ell = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Remarque 1 Cette notion de convergence d'une suite d'éléments de E dépend du choix de la norme.

Exemple 12 Soit E l'ensemble des fonctions bornées continues et intégrables sur $\mathbb{R}^+$.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant n - \dfrac{1}{n} \quad \text{ou} \quad x \geqslant n + \dfrac{1}{n} \\ n(x - n + \dfrac{1}{n}) & \text{si} \quad x \in [n - \dfrac{1}{n}; n] \\ -n(x - n - \dfrac{1}{n}) & \text{si} \quad x \in [n; n + \dfrac{1}{n}] \end{cases}$$

On note f la fonction nulle. Etudier $\|f_n - f\|_\infty$ et $\|f_n - f\|_1$

Proposition 4 (Convergence des suites extraites) Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E.
- Si la suite converge, alors toute suite extraite converge vers la même limite.
- Réciproquement, s'il existe un élément ℓ de E tel que les deux suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors la suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ

Proposition 5 Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites d'éléments de E et soit λ un scalaire.
On suppose que $x_n \longrightarrow \ell_1$ et $y_n \longrightarrow \ell_2$; alors $(x_n + \lambda y_n) \longrightarrow \ell_1 + \lambda \ell_2$

Définition 4 Une suite $(x_n)_n$ est bornée si il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n\| \leqslant M$.

Proposition 6 Toute suite convergente est bornée.
La réciproque est fausse

III Comparaison des normes

Définition 5 (Normes équivalentes)
Soit E un espace vectoriel.
Deux normes N et N' définies sur E sont dites équivalentes lorsqu'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad N(x) \leqslant \alpha N'(x) \quad \text{et} \quad N'(x) \leqslant \beta N(x)$$

Proposition 7 (Invariance du caractère borné et de la convergence.)
Si deux normes N et N' sont équivalentes sur E, alors :

- Toute partie, toute suite, toute application bornée pour l'une, l'est pour l'autre.
- Si une suite converge vers ℓ pour l'une, alors elle converge vers ℓ pour l'autre.

Exemple 13 (Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes)
Soit E l'ensemble des fonctions bornées continues et intégrables sur $\mathbb{R}^+$.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant n - \dfrac{1}{n} \quad \text{ou} \quad x \geqslant n + \dfrac{1}{n} \\ n(x - n + \dfrac{1}{n}) & \text{si} \quad x \in [n - \dfrac{1}{n}; n] \\ -n(x - n - \dfrac{1}{n}) & \text{si} \quad x \in [n; n + \dfrac{1}{n}] \end{cases}$$

On note f la fonction nulle. Etudier $\|f_n - f\|_\infty$ et $\|f_n - f\|_1$.
Conclusion sur les normes ?

IV Topologie d'un espace vectoriel normé

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$. La distance associée est notée d.

IV.1 Ouvert, fermé

Définition 6 (Boules et spheres) Soit $a \in E$ et soit r un réel strictement positif.
La boule ouverte de centre a et de rayon r est $B(a,r) = \{x \in E,\, d(a,x) < r\}$
La boule fermée de centre a et de rayon r est $B_f(a,r) = \{x \in E,\, d(a,x) \leqslant r\}$
La sphere de centre a et de rayon r est $\mathcal{S}(a,r) = \{x \in E,\, d(a,x) = r\}$

Exemple 14 Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ décrire $B(a,r)$ pour les différentes normes.

Définition 7 (Partie ouverte) Une partie U de E est dite ouverte lorsque :

$$\forall a \in U, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad B(a,\varepsilon) \subset U$$

Exemple 15 $\emptyset$ et E sont des ouverts.

Exemple 16 Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, y > 0\}$

Exemple 17 $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x \leqslant 0\}$

Exemple 18 Une boule ouverte $B(a,r)$ est ouverte.
Une boule fermée $B_f(a,r)$ n'est pas ouverte.

Définition 8 (Partie fermée)
Une partie A de E est dite fermée lorsque son complémentaire est ouvert.

Exemple 19 L'ensemble vide est un fermé de E.
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant 0\}$ est une partie fermée de E.

Exemple 20 Dans $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, $I = [2, 5]$, $J = [1; 6[$ et $K = [4; +\infty[$ sont ils ouverts, fermés ?

Proposition 8 (Intersection et réunion d'ouverts ou de fermés)

- Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
- Toute intersection finie $A_1 \cap .... \cap A_n$ d'ouverts est un ouvert.
- Toute intersection de fermés est un fermé.
- Toute réunion finie $B_1 \cup ... \cup B_n$ de fermé est un fermé.

Remarque 2 Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert :
Dans $\mathbb{R}$, on a $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}[= [0, 1]$

Définition 9 (Partie bornée)
Une partie A de E est dite bornée lorsque : il existe un réel $R > 0$ tel que $A \subset B(0_E, R)$.

IV.2 Intérieur, adhérence

Définition 10 (Intérieur) Soit A une partie de E.
Un point $a \in A$ est dit intérieur à A lorsqu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$.
L'ensemble des points intérieurs à A est noté : $\overset{o}{A}$, c'est l'intérieur de A.

Remarque 3 Une partie A est ouverte si et seulement si elle est égale à son intérieur.

Définition 11 (Adhérence) Soit A une partie de E.
Un point $x \in E$ est dit adhérent à A lorsque toute boule de centre x rencontre A.
On appelle adhérence de A, et on note $\bar{A}$, l'ensemble des points adhérents à A.

Remarque 4 Une partie A est fermée si et seulement si elle est égale à son adhérence

Proposition 9 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence)
Soit A une partie de E et a un point de E.
Le point a est adhérent à A si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.

Remarque 5 Soit A une partie de E. Les 3 propositions suivantes sont équivalentes
- A est fermée .
- $A = \bar{A}$.
- La limite de toute suite convergente de A est dans A.

Définition 12 (Partie dense) Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.
La partie A est dense si son adhérence $\bar{A} = E$.

Exemple 21 L'ensemble des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition 13 (Frontière) La frontière d'une partie A de E est l'ensemble $Fr(A) = \bar{A} \setminus \overset{o}{A}$

Exemple 22 Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, on considère
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 < x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant y < 2\}$.
Le point $((3; 0)$ est-il un point intérieur à A ? le point $(2, 1)$?
Le point $(1, 2)$ est-il adhérent à A ?
Déterminer la frontière de A.

IV.3 Partie Convexe

Définition 14 (segment) Soient a et b deux vecteurs de E. Le segment d'extremité a et b est l'ensemble des vecteurs x de E pouvant s'écrire sous la forme $x = ta + (1 - t)b$ avec $t \in [0; 1]$.
Notation : $[a; b] = \{ta + (1 - t)b, \quad t \in [0; 1]\}$

Définition 15 (Partie convexe)
Une partie A de E est dite convexe lorsque pour tous a et b dans A, le segment $[a; b]$ est inclus dans A.

Exemple 23 L'ensemble vide et E sont convexes.

Proposition 10 (Convexité des boules) Toute boule ouverte ou fermée est une partie convexe.

V Limite/continuité d'une fonction $f : E \to F$ avec E et F e v n

Dans tout ce paragraphe, E et F sont des espaces vectoriels normés; les normes sont notées $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$; les distances associées sont notées d_E et d_F

V.1 Définitions, Premières propriétés

Définition 16 (Limite d'une fonction) Soit A une partie de E, soit $f : A \to F$ une fonction et soit a un point adhérent à A. Soit $b \in F$
On dit que f admet pour limite b, en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad (\|x - a\|_E \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon)$$

Si f admet deux limites b_1 et b_2 en a, alors $b_1 = b_2$.
Conséquence : lorsque f admet une limite en a, celle ci est appelée **la** limite de f, et est notée $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Proposition 11 (Caractérisation séquentielle de la limite)
Soit A une partie de E, soit $f : A \to F$ une fonction. Soit a un point adhérent à A et soit $\ell \in F$. Alors :

$$\left(\ell = \lim_{x \to a} f(x)\right) \iff \left(\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n \to +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell\right).$$

Proposition 12 (Composition des limites)
Soit $f : A \to B$ et $g : B \to G$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$. Soit $a \in \bar{A}$ et soit $b \in \bar{B}$. Soit $c \in G$.

On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et que $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$; alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$.

Proposition 13 (Combinaisons linéaires)
Soient f et g deux fonctions de $A \to F$. Soit $a \in \bar{A}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_1$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b_2$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} (f + \lambda g)(x) = b_1 + \lambda b_2$

V.2 Continuité et ouverts/fermés

Définition 17 (Continuité) Soit $f : A \to F$ et soit $a \in A$.
On dit que l'application f est continue en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est continue sur A lorsque f est continue en tout point a de A.

Remarque 6 Si f admet une limite b en a, et si $a \notin A$, on peut alors prolonger f en a en posant $f(a) = b$. Ce prolongement, noté abusivement f est alors continu en a

Proposition 14 (Continuité d'une composée)
Soit $f : A \to B$ et $g : B \to G$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$. Soit $a \in A$ et on note $b = f(a) \in B$.

- Si f est continue en a et si g est continue en $b = f(a)$, alors gof est continue en a.
- Si f est continue sur A et si g est continue sur B, alors $g \circ f$ est continue sur A.

Proposition 15 (Combinaisons linéaires)
Soient f et g deux fonctions de $A \to F$. Soit $a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si f et g sont continues sur A, alors $f + \lambda g$ est continue sur A.

Théorème 1 (Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé)
Soit $f : E \to F$ une fonction continue. Alors :

- l'image réciproque d'un ouvert $B \subset F$ est un ouvert de E :
$$B \text{ ouvert de } F \Rightarrow f^{-1}(B) = \{x \in E, \quad f(x) \in B\} \text{ est un ouvert de } E$$
- l'image réciproque d'un fermé de F est un fermé de E :
$$B \text{ fermé de } F \Rightarrow f^{-1}(B) = \{x \in E, \quad f(x) \in B\} \text{ est un fermé de } E$$

Proposition 16 (Cas particulier $F = \mathbb{R}$) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors :

- L'ensemble $U = \{x \in E, \quad f(x) > 0\}$ est un ouvert de E.
- Les ensembles $V = \{x \in E, \quad f(x) \geqslant 0\}$ et $W = \{x \in E, \quad f(x) = 0\}$ sont des fermés de E.

Exemple 24 $E = \mathbb{R}^3$ et $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + 2y - 7z \geqslant 0\}$

V.3 Application Lipschitzienne

Définition 18 Une application $f : A \to F$, avec A partie de E, est dite lipschitzienne lorsqu'il existe un réel k tel que :
$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x - y\|_E$$

Proposition 17 (Continuité des applications lipschitziennes)
Toute application lipschitzienne est continue.

Exemple 25 L'application "norme" : $E \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne

VI Espace vectoriel de dimension finie

VI.1 Equivalence des normes en dimension finie

Théorème 2 (Equivalence des normes (admis))
Toutes les normes d'un espace vectoriel normé E de dimension finie sont équivalentes.
Conséquence : en dimension finie, la convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme.

VI.2 Utilisation des coordonnées

Proposition 18 (Convergence et coordonnées) E est un espace vectoriel normé de dimension p. On note $\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p\}$ une base de E.
Soit (x_n) une suite d'éléments de E et soit $\ell \in E$. On note $(x_{1,n}, ...x_{p,n})$ et $(\ell_1, ..., \ell_p)$ les coordonnées de (x_n) et de ℓ dans cette base.
La suite (x_n) converge vers ℓ si et seulement si pour chaque entier $k \in \{1, ..., p\}$, la suite $(x_{k,n})$ converge vers ℓ_k

Exemple 26 Dans $E = M_3(\mathbb{K})$, on considere la suite (A_n) avec $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ a'_n & b'_n & c'_n \\ a''_n & b''_n & c''_n \end{pmatrix}$

Proposition 19 (Fonctions coordonnées)
Soit $f : A \to E$ (avec A partie d'un espace vectoriel normé F). Soit $a \in \bar{A}$ et soit $b \in E$.
On note $f_1, ...f_p$ les fonctions coordonnées de f et $(b_1, ...b_p)$ les coordonnées de b dans la base $\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p\}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \{1, .., p\}, \ \lim_{x \to a} f_k(x) = b_k$$

Exemple 27 Dans $E = M_2(\mathbb{K})$, on considere la fonction f avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$

Proposition 20 (Continuité et coordonnées)
Soit $f : A \to E$ (avec A partie d'un espace vectoriel normé F). Soit a un point de A.
f est continue en a si et seulement si chaque fonction coordonnées f_k est continue en a.

VI.3 Fonction continue sur une partie fermée bornée

Théorème 3 (Extrema d'une fonction numérique sur une partie fermée bornée d'un espace vectoriel normé)
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit A une partie **fermée bornée** de E.
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 7 Traduire le résultat précédent lorsque $E = \mathbb{R}$.

VI.4 Cas particuliers : fonctions linéaires, polynomiales, multilinéaires

Définition 19 (Fonction polynomiale)
Soit A une partie de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.
Une fonction $f : A \to \mathbb{K}$ est dite polynomiale lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que l'expression de $f(x)$ soit un polynome en les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

Proposition 21 (Continuité) Toute fonction polynomiale est continue.

Théorème 4 (Continuité des applications linéaires en dimension finie)
Soient E et F deux espaces vectoriels normés . On suppose E de dimension finie.
Toute application linéaire $f : E \to F$ est lipschitzienne donc continue.

Théorème 5 (Continuité des applications bilinéaires en dimension finie)
Soient E et F, 2 espaces vectoriels normés de dimension finie. Et soit G un espace vectoriel normé.
Toute application bilinéaire $B : E \times F \to G$ est continue.

Théorème 6 (Continuité des applications multilinéaires en dimension finie)
Soient $E_1, ..., E_p$ p espaces vectoriels. Et soit F un espace vectoriel. On considère :

$$f : \begin{cases} E_1 \times E_2 ... \times E_p & \to & F \\ (x_1, x_2, ...x_p) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_p) \end{cases}$$

On rappelle que f est p-linéaire si pour tout $i \in \{1, .., p\}$ et pour tout $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de $E_1 \times E_2 ... \times E_p$, l'application partielle $t \mapsto f(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ...x_p)$ est une application linéaire de E_i vers F.
Si f est p-linéaire et si les $E_1, ..., E_p$ sont de dimension finie, alors f est continue.

Proposition 22 (Continuité de l'application déterminant)
L'application $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue.

Remarque 8 Conséquence : l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$.