 Programme de colle. Semaine n°18 : du 19/02 au 23/02/2024.

Déroulement : La colle comporte cette semaine pour tout le monde une (ou plusieurs) question(s) de cours, suivi(e)s de un ou deux exercices.

I : Compléments sur l'intégration

Voir le programme précédent.
Il est important que les étudiants connaissent précisément les théorèmes.

II : Couples et vecteurs de variables aléatoires, inégalités probabilistes.

Couple de variables aléatoires discrètes. Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$. Loi conjointe, lois marginales. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
Loi conditionnelle de Y sachant un événement A.
Variables aléatoires indépendantes : Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants. Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.
De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y) \text{ lorsque } X \perp\!\!\!\perp Y.$$

Extension au cas de n variables aléatoires.
Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.
Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
Fonctions de variables indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$. Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi. Extension au cas de plus de deux coalitions.
Rappel de la formule de transfert : $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas :

$$\mathrm{E}\Big(f(X)\Big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$

On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n-uplets de variables aléatoires.
Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et : $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$.
Extension au cas de n variables aléatoires.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et : $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$ Cas d'égalité.
Covariance de deux variables aléatoires. Relation $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes.
Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.
Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.
Inégalités probabilistes Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$, pour tout $\varepsilon > 0$: $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
Les étudiants doivent savoir retrouver, avec $\sigma = \sigma(X_1)$: $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

III : Questions de cours

- Théorème de convergence dominée (pour les suites d'intégrales) (énoncé)
- Théorème d'intégration terme à terme (pour les intégrales de séries de fonctions) (énoncé)
- Continuité de $x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ (énoncé) ou Dérivabilité de $x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ (énoncé) ou Caractère C^k de $x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ (énoncé)
- Variance d'une somme de variables aléatoires. (dem)
- Fonction génératrice d'une somme de 2 var indépendantes (dem)
- Soit $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m,p)$, **indépendantes.** Alors $X+Y \sim \mathscr{B}(n+m,p)$ (dem)
- Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, **indépendantes.** Alors $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu)$ (dem)
- Inégalité de Markov, Tchebychev (dem)
- Loi faible des grands nombres (dem)