Fonctions de deux variables

Table des matières

Fonctions de deux variables

1 Notion de fonction de deux variables

1.1 Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^2$

Définition 2 *: **Norme sur un espace vectoriel***
Soiet E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. L'application $N : E \to \mathbb{R}_+$ est une norme si elle vérifie :
- $\forall u \in E, \quad N(u) = 0 \Longrightarrow u = 0_E$ *(séparation)*
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall u \in E, \quad N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$ *(homogénéité)*
- $\forall (u,v) \in E^2, \quad N(u+v) \leqslant N(u) + N(v)$ *(inégalité triangulaire)*

Remarque 1 *On note souvent $||u||$ au lieu de $N(u)$.*
On dit que $(E, ||.||)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Définition 4 *: **Norme canonique de** $\mathbb{R}^2$*
L'application

$$\begin{array}{cccc} ||.|| & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & u=(x,y) & \mapsto ||u|| = \sqrt{x^2+y^2} & \end{array}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^2$

Définition 6 *: **Boule ouverte, boule fermée***
Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r \in]0, +\infty[$
- *l'ensemble $B(a,r) = \left\{u \in \mathbb{R}^2, \quad ||u-a|| < r\right\}$ est appelé la **boule ouverte de centre** a*
- *l'ensemble $B_F(a,r) = \left\{u \in \mathbb{R}^2, \quad ||u-a|| \leqslant r\right\}$ est appelé la **boule fermée de centre** a*

Définition 8 *: **topologie dans** $\mathbb{R}^2$*
Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$
- *On dit que a est un **point intérieur** à A s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$*
- *Une partie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ si tous les points de $\mathcal{O}$ sont intériers à $\mathcal{O}$*
- *Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^2$ est dite **fermée** si son complémentaire est un ouvert.*

Remarque 2
- *Dire que $\mathcal{O}$ est un ouvert signifie que tout point de $\mathcal{O}$ peut être entouré par une boule ouverte incluse dans $\mathcal{O}$ donc aucun point n'est sur le bors de $\mathcal{O}$*

- *Par conséquent une boule ouverte est un ouvert de $\mathbb{R}^2$*
- *Une boule fermée est un fermé*
- *Il y a des ensemble qui ne sont ni ouverts, ni fermés*
- *$\mathbb{R}^2$ et $\{0_E\}$ sont à la fois fermés et ouverts*

Exemple 1 *l'ensemble $]a,b[\times]c,d[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$*

1.2 Définition et représentation des fonctions

Définition 10 *:*
On appelle ***fonction de deux variables réelles à valeurs dans*** $\mathbb{R}$ *toute fonction définie sur une partie* A *de* $\mathbb{R}^2$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$

Exemple 2 *La fonction* $f : (x, y) \mapsto ln(2x + y + 2)$ *est définie sur* $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y + 2 > 0\}$ *(il s'agit du demi-plan délimité par la droite d'équation* $y = -2x - 2$ *et contenant* $(0, 0)$

Exemple 3 *La fonction* $g : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ *est définie sur* $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \geqslant 0\}$
Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ *le disque ouvert de centre* $(0, 0)$ *et de rayon* 1. *Alors* $\mathcal{D}_f$ *est le complémentaire de* $\mathcal{D}$ *dans* $\mathbb{R}^2$.

Exemple 4 *La fonction* $h : (x, y) \mapsto e^{-x^2+y^2}$ *est définie sur* $\mathbb{R}^2$.

Définition 12 *:*
Une fonction de deux variables est dire ***fonction polynomiale*** *si elle est combiniaison linéaire de fonctions de la forme* $(x, y) \mapsto x^m y^n$ *avec* $(m, n) \in \mathbb{N}^2$

Exemple 5 *les fonctions* $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x^3 y$ *et* $g : (x, y) \mapsto xy$ *sont des fonctions de deux variables polynomiales.*

Définition 14 *:* ***Surfaces et lignes de niveaux***
Soit f *une fonction de deux variables définie sur* $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$.

1. *On appelle* ***surface****, la représentation graphique de* f *dans l'espace, c'est-à-dire l'ensemble* $\mathcal{S}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \mid z = f(x, y) \ , \ (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$.
2. *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *On appelle* ***ligne de niveau a*** *de* f, *l'ensemble noté* $\mathcal{L}_f^a$, *des points* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *vérifiant* $f(x, y) = a$

Exemple 6 *La fonction* $f : (x, y) \mapsto x^2+y^2$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *a pour lignes de niveaux les cercles d'équation* $x^2+y^2 = a$ *avec* $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemple 7 *La fonction* $g : (x, y) \mapsto xy$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *a pour lignes de niveua les morceaux d'hyperbole d'équation* $xy = a$

1.3 Continuité

Définition 16 *:* ***Limite***
Soit f *une fonction définie sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Soit* $(x_0, y_0) \in \Omega$.
On dit que f *admet pour limite* ℓ *en* (x_0, y_0) *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad ||(x, y) - (x_0, y_0)|| < \eta \Longrightarrow ||f(x, y) - \ell|| < \varepsilon$$

Définition 18 : ***Continuité***
Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$.
*On dit que f est **continue** en (x_0, y_0) si f admet pour limite $f(x_0, y_0)$ en (x_0, y_0), autrement dit :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega, \quad ||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \eta \Longrightarrow ||f(x,y) - f(x_0,y_0)|| < \varepsilon$$

*On dit que f est **continue** sur Ω si f est continue en tout point de Ω.*

Proposition 2 : ***Operations sur les fonctions continues***

1. *Toute fonction polynomiale est continue.*
2. *Soit g une fonction sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans un intervelle I et φ une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $f = \varphi \circ g$ est continue sur Ω.*
3. *L'ensemble des fonctions continues sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
4. *Tout produit de fonctions continues et tout quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sont des fonctions continues.*

Exemple 8 *Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.*
La fonction $g : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (car fonction polynomiale) à valeurs dans $I = \mathbb{R}_+$.
La fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Donc $f = \varphi \circ g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

Exemple 9 *Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.*
La fonction $g : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (car fonction polynomiale) à valeurs dans $I = [1, +\infty[$.
La fonction $h : (x,y) \mapsto xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car fonction polynomiale
Donc f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Exemple 10 *Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.*

- *La fonction $g : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (car fonction polynomiale) à valeurs dans $I = \mathbb{R}_+$.*
La fonction $h : (x,y) \mapsto xy^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car fonction polynomiale
Donc f est donc continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

- *Pour la continuité en $(0,0)$ on passe en coordonnées polaires : $\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \end{cases}$.*

On a alors $f(x,y) = \dfrac{r^3 cos(\theta) sin^2(\theta)}{r^2} = rcos(\theta) sin^2(\theta)$.
Donc $||f(x,y) - f(0,0)|| \leqslant r$ et $||f(x,y) - f(0,0)|| \longrightarrow_{r \to 0} 0$.
Ainsi f est continue en $(0,0)$ donc continue sur $\mathbb{R}^2$

2 Calcul différentiel

2.1 Dérivées partielles

Définition 20 : ***Applications partielles***
Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle applications partielles de f au point (x_0, y_0) les fonctions obtenues à partir de f en fixant une variable :

$$f(., y_0) : x \mapsto f(x, y_0) \qquad ((x_0, .) : y \mapsto f(x_0, y)$$

Définition 22 : ***Dérivées partielles en un point***
Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. *f admet une dérivée partielle par rapport à x en (x_0, y_0) lorsque, l'application partielle $f(., y_0)$ est dérivable en x_0. On note cette dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.*
   On a alors
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
2. *f admet une dérivée partielle par rapport à y en (x_0, y_0) lorsque, l'application partielle $f(x_0, .)$ est dérivable en y_0. On note cette dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.*
   On a alors
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Remarque 3 : *la dérivée partielle est définie par la dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle. Donc les règles de la dérivation s'appliquent.*

Remarque 4 : *Attention l'existence des dérivées partielles en un point n'entraîne pas la continuité en ce point.*

Exemple 11 *Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.*
Montrer que les dérivées partielles existent en $(0, 0)$, mais que la fonction n'est pas continue en $(0, 0)$.

- *Pour $x \neq 0$ on a $\dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.*
- *Pour $y \neq 0$ on a $\dfrac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.*
- *Mais $f(x, x) = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x, x) = \dfrac{1}{2} \neq 0$.*

Définition 24 *: **Dérivées partielles***
Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dont les dérivées partielles existent en tout point de Ω. On appelle :

— *dérivée partielle de f par rapport à la variable x, la fonction définie sur Ω par*

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

— *dérivée partielle de f par rapport à la variable y, la fonctions définie sur Ω par*

$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Remarque 5 *Contrairement aux applications partielles, les dérivées partielles sont des fonctions de deux variables.*

Remarque 6 *En pratique, pour obtenir la dérivée partielle de f par rapport à x, on considère y comme un paramètre fixé et on dérive l'application par rapport à x*

Exemple 12 *Déterminer les dérivées partielles de*

$$f : (x,y) \mapsto x^2 + y^3 - 3x^3y \qquad g : (x,y) \mapsto cos(x-y)sin(x+y) \qquad h : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *Pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ les application partielles $f(.,y_0)$ et $f(x_0,.)$ sont des fonctions polynomiales donc dérivables. On obtient*
$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto 2x - 9x^2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto 3y^2 - 3x^3$$
2. *Pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ les application partielles $g(.,y_0)$ et $g(x_0,.)$ sont des fonctions dérivables comme composées de fonctions dérivables. On obtient*
$$\frac{\partial g}{\partial x} : (x,y) \mapsto -sin(x-y)sin(x+y) + cos(x-y)cos(x+y) = cos(2x)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} : (x,y) \mapsto sin(x-y)sin(x+y) + cos(x-y)cos(x+y) = sin(2y)$$
3. • *Pour $(x,y) \neq (0,0)$ les fonctions partielles sont des fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas.*
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y(x^2+y^2) - 2x(x^3y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^4y + 3x^2y^2 - 2x^4y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3(x^2+y^2) - 2y(x^3y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5 + x^3y^2 - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
   • *En $(0,0)$ $h((.,0) : x \mapsto 0$ et $h(0,y) : y \mapsto 0$ sont dérivables et*
$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0$$

Définition 26 *: **Fonction de classe $\mathcal{C}^1$***
Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si elle admet des dérivées partielles et que ces dérivées partielles sont continues sur Ω

Exemple 13 *Soit* $h : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- *La fonction est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *comme quotient de fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *dont le dénominateur ne s'annule pas.*
- *Pour* $(x,y) \neq (0,0)$ *on a*

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

D'autre par si $x \neq 0$ *on a* $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = 0$ *et si* $y \neq 0$ *on a* $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0$.

On étudie la continuité en $(0,0)$ *est dérivées partielles en passant en coordonnées polaires :* $\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \end{cases}$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = rcos^2(\theta)sin(\theta)(cos^2(\theta)+3sin^2(\theta) \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = rcos^3(\theta)(cos^2(\theta)-sin^2(\theta) = rcos^3(\theta)cos(2\theta)$$

D'où

$$||\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial h}{\partial x}(0,0)|| \leqslant 4r \quad ||\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial h}{\partial y}(0,0)|| \leqslant r$$

En faisant tendre r *vers* 0 *on en déduit la continuité des dérivées partielles en* $(0,0)$

Proposition 4 : ***Propriétés des fonctions de classe*** $\mathcal{C}^1$

1. *Toute fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$
2. *Toute fonction polynomiale est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$
3. *Soit* g *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$*, à valeurs dans un intervalle* I*,* φ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Alors* $f = \varphi \circ g$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* Ω.
4. *L'ensemble des fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* Ω *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*
5. *Tout produit et tout quotient de fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *dont le dénominateur ne s'annule pas est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* Ω.

2.2 Développement limité à l'ordre 1

Proposition 6 : ***Developpement limité à l'ordre*** 1
Soit f *une fonction définie sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* Ω *et soit* $(x_0,y_0) \in \Omega$*. Alors :*

$$f(x_0+h, y_0+k) =_{||(h,k)|| \to 0} f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o(||(h,k)||)$$

Remarque 7 *On en déduit la relation*

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) =_{||(h,k)|| \to 0} h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o(||(h,k)||)$$

La fonction $(h,k) \mapsto h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ *représente la meilleure approximation linéaire de la fonction* $(h,k) \mapsto f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)$.

Remarque 8 *Comme pour les fonctions de la variable réelle on peut poser* $h = x - x_0$ *et* $k = y - y - y_0$ *et on obtient*

$$f(x,y) =_{||(x-x_0,y-y_0)|| \to 0} f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o(||(x-x_0,y-y_0)||)$$

Exemple 14 *Donner la meilleur approximation linéaire de $f : (x, y) \mapsto e^{x+y} - 1$ au voisinage de $(0, 0)$.*
f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x+y}$$

En particulier

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$$

La meilleur approximation linéaire est donc $(h, k) \mapsto h + k$

Remarque 9 *Dans le cas des fonctions de la variable réelle, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0 alors elle admet un $DL_1(x_0)$*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o((x - x_0))$$

La droite d'équation $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ est la tangente à la courbe représentative de f en x_0.
De même pour les fonctions de deux variables. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de (x_0, y_0) alors elle admet admet un $DL_1(x_0, y_0)$ et le plan d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

est le plan tangent à la surface représentative de f en (x_0, y_0).

2.3 Gradient

Définition 28 *: **Gradient***
Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. On appelle gradient de f la fonction définie de Ω dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ par :

$$\nabla(f) : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Remarque 10 *Le développement limité à l'ordre 1 de f au point (x_0, y_0) peut donc aussi s'écrire :*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) =_{||(h,k)|| \to 0} f(x_0, y_0) +^t \nabla(f)(x_0, y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(||(h, k)||)$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) =_{||(h,k)|| \to 0} f(x_0, y_0) + < \nabla(f)(x_0, y_0), (h, k) > + o(||(h, k)||)$$

3 Dérivées partielles composées

3.1 Dérivée selon un vecteur

Définition 30 *: **Dérivée selon un vecteur***
Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $(x_0, y_0) \in \Omega$ et u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. On dit que f admet une dérivée au point $(x_0, y_0$ selon de vecteur u lorsque la fonction $f_u : t \mapsto f((x_0, y_0) + tu)$ est dérivable en 0. La dérivée en (x_0, y_0) suivant u vaut alors

$$D_u f(x_0, y_0) = f_u'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + tu) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Remarque 11 *Lorsqu'elles existent les dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial x}x_0, y_0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial x}x_0, y_0)$ *sont les dérivées au point* (x_0, y_0) *respectivement suivant les vecteur* $e_1(1,0)$ *et* $e_2(0,1)$

> **Proposition 8** *: **Expression avec le gradient***
> *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $(x_0, y_0) \in \Omega$ et u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Alors f admet une dérivée au point $(x_0, y_0$ selon de vecteur u*
>
> $$D_u f(x_0, y_0) = f'_u(0) =< \nabla f(x_0, y_0), u >$$

f étant de classe $\mathcal{C}^1$, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en (x_0, y_0) :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}x_0, y_0) + o(||(h,k)||$$

On pose $u(a, b)$ un vecteur. Alors

$$f(x_0 + ta, y_0 + tb) = f(x_0, y_0) + ta\frac{\partial f}{\partial x}x_0, y_0) + tb\frac{\partial f}{\partial y}x_0, y_0) + o(||(ta, tb)||$$

D'où

$$\frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t} =_{t\to 0} a\frac{\partial f}{\partial x}x_0, y_0) + b\frac{\partial f}{\partial y}x_0, y_0) + o(||(a,b)||$$

Par passage à la limite quand t tend vers 0 donne le résultat : f possède une dérivée en (x_0, y_0) selon le vecteur $u(a, b)$ et

$$D_u f(x_0, y_0) = a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Exemple 15 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2y$.*
Déterminer la dérivée de f en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ selon le vecteur $u\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et admet des dérivées partielles en tout point (x, y) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 2$$

D'où $D_u f(x, y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times 2x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times (3y^2 - 2) = x\sqrt{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}y^2 - \sqrt{2}$

3.2 Composition

> **Proposition 10** *: **Règle de la chaîne***
> *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient x et y deux fonctions de classse $\mathcal{C}^1$ sur $I \subset \mathbb{R}$ et telles que $\forall t \in I, \quad (x(t), y(t)) \in \Omega$.*
> *Alors $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et*
>
> $$\forall t \in I, \quad \frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

Démo

$$\frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{x(t+h) - x(t)}{h} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{y(t+h) - y(t)}{h} + o\left(\frac{||(x(t+h) -$$

Or x et y sont dérivables, donc le membre de droite admet une limite finie quand $h \to 0$. Donc $f : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est dérivable au point étudié et un passage à la limite donne le résultat voulu :

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t)$$

Exemple 16 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2y$.*
En utilisant la règle de la chaîne, étudier la dérivabilité de $h : t \mapsto f(\sqrt{t}, t^2)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et admet des dérivées partielles en tout point (x, y) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 2$$

De plus $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto t^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$h'(t) = 2\sqrt{t} \times \frac{1}{2\sqrt{t}} + \left(3(t^2)^2 - 2\right) \times 2t = 3t^5 - 4t + 1$$

Proposition 12 *:*
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient φ et ψ deux fonctions de classse $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω' telles que $\forall (u, v) \in \Omega', \quad (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in \Omega$.
Alors $g : (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω' et

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)$$

Exemple 17 *Passage en coordonnées polaires*

4 Extremum

Définition 32 *: **Extremum global et local***
Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $(x_0, y_0) \in \Omega$.

— *On dit que f admet un **maximum local** en (x_0, y_0) s'il existe un réel $r > 0$ tel que :*

$$\forall (x, y) \in \mathcal{B}((x_{,0}, r_0), t), \quad f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$$

*Le maximum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x, y) \in \Omega$.*

— *On dit que f admet un **minimum local** en (x_0, y_0) s'il existe un réel $r > 0$ tel que :*

$$\forall (x, y) \in \mathcal{B}((x_{,0}, r_0), t), \quad f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$$

*Le minimum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x, y) \in \Omega$.*

Exemple 18 *La fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ vérifie :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geqslant 0 = f(0, 0)$$

Donc f admet un minimum global en $(0, 0)$.

Définition 34 *: **Point critique***
Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles sur Ω, et $(x_0, y_0) \in \Omega$.
*On dit que $(x_0, y_0) \in \Omega$ est un **point critique** de f lorsque*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

autrement dit lorsque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

Proposition 14 *: **Condition nécéssaire d'extremum local***
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \Omega$. Si f admet une extremum local en $(x_{,0}, y_0)$, alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

Démo : On suppose que f admet un extremum local en (x_0, y_0). Alors les applications partielles $f(., y_0)$ et $f(x_0, .)$ admettent aussi des extrema locaux respectivement en x_0 et y_0.
Or ces fonctions d'une variable réelle sont dérivables aux points considéréq (qui ne sont pas des bornes de l'intervalle de définition). Donc leurs dérivées s'annulent respectivement en x_0 et y_0, ce qui donne $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Donc (x_0, y_0) est un point critique de f.

Remarque 12 *Comme pour les fonctions d'une variable réelle, c'est une condition nécessaire mais pas suffisante.*

Exemple 19 *Soit $f : (x, y) \mapsto xy$.*
Montrer que $(0, 0)$ est un point critique de f puis que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.
f est une fonction polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$$

Ainsi $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$
Or $f(x, -x) = -x^2 \leqslant 0 = f(0, 0)$ et $f(x, x) = x^2 \geqslant 0 = f(0, 0)$
Donc $(0, 0)$ n'est pas un extremum local.

Exemple 20 *Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x$.*
Etudier les extrema.
f est une fonction polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

Ainsi $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff (x, y) = \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$
De plus : $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f\left(\left(\frac{1}{2} + h, k\right)\right) - f\left(\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right) &= \left(\frac{1}{2} + h\right)^2 + k^2 - \frac{1}{2} - h - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + h + h^2 + k^2 - \frac{1}{2} - h - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ &= h^2 + k^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\left(\frac{1}{2}+h,k\right)\right) - f\left(\left(\frac{1}{2},0\right)\right) \geqslant 0$ *donc* f *admet un minimum local en* $\left(\frac{1}{2},0\right)$.