

TD - 29 - Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 Continuité

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ f : (x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur \mathbb{R}^2

Exercice 2 Dérivées partielles

Calculer les dérivées partielles des fonctions numériques suivantes :

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. $f(x, y) = y^2 e^{x^2 y} + x \sin(y^3)$

3. $f(x, y) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x^3 y}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

4. $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Exercice 3 Développement limité

Soit $f(x, y) = \sin(x)e^{x^2 y} + \arctan(xy)$

1. Calculer $D_u f(a)$ pour $a = (1, -1)$ et $u = (1, 2)$ puis avec $u = (-1, 1)$.

2. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ puis de $(0, 0)$

Exercice 4 Changement de variable

On considère la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + xy^2 + e^{x-y}$ puis la fonction F définie par $F(t) = f(t^3, e^t)$.

Calculer par deux méthodes différentes $F'(t)$

Exercice 5 Equations aux dérivées partielles

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} . Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$.

On note $f(x, y) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = F(u, v)$.

1. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en fonctions dérivées partielles de F .

2. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 - 2y^2$ en fonction des dérivées partielles de F .

Résoudre cette équation aux dérivées partielles.

Exercice 6 Extrema

Déterminer les extrema locaux des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} suivantes :

1. $f(x, y) = x^3 + y^3$
2. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
3. $f(x, y) = 2y^4 - 3xy^2 + x^2$
4. $f(x, y) = x^3 - y^2 - x$

Exercice 7 Extrema

Déterminer les extrema de la fonctions $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2y$ sur $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$