Table des matières

Dans tout le chapitre $E = \mathbb{R}^n$ et I désigne un intervalle d'intérieur non vide.

On étudie les fonctions définies sur I et à valeurs dans E : $f \left\{\begin{array}{l} I \to E \\ t \mapsto (f_1(t), ..., f_n(t)) \end{array}\right.$

E étant de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. On note $\|\cdot\|$ une norme sur E.

I Rappels

De manière générale, si $f \ : \ t \in I \longrightarrow (f_1(t), \cdots, f_n(t))$, où les f_i sont des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que les f_i sont les **fonctions coordonnées de f.**

Si $n = 2$, on pourra considérer que f est une application qui à un instant $t \in I$ associe un point M du plan, de coordonnées $f(t) = (x(t), y(t))$ (ce qui suppose qu'on ait préalablement choisi un repère du plan).
Par ailleurs, les fonctions coordonnées de f sont alors $(t \to x(t))$ et $(t \to y(t))$.

De même, si $n = 3$, on pourra considérer que f est une application qui à un instant $t \in I$ associe un point M de l'espace, de coordonnées $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
Par ailleurs, les fonctions coordonnées de f sont alors $(t \to x(t))$, $(t \to y(t))$ et $(t \to z(t))$.

Définition 1 Soit $f \ : \ I \to \mathbb{R}^n$ et soit $a \in I$.
On dit que f admet une limite ℓ en a lorsque $\lim\limits_{t \to a} \|f(t) - \ell\| = 0$.

Proposition 1 Soit $a \in I$ et soit $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{Alors : } \left(\lim_{t \to a} \|f(t) - \ell\| = 0\right) \iff \left(\forall i \in [\![1 \, ; \, n]\!], \ \lim_{t \to a} f_i(t) = \ell_i\right)$$

D'après la proposition 1, il est clair que l'on a unicité de la limite. Par ailleurs, on aurait aussi bien pu définir la limite à partir des fonctions coordonnées de f.

De même que pour les fonctions à valeurs réelles, on peut définir les notions de limite à gauche ($\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t < a}}$ ou $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \leq a}}$, à préciser...) ou de limite à droite...

Définition 2
- On dit que f est continue en a lorsque $\lim\limits_{t \to a} f(t) = f(a)$, ce qui revient à dire que les coordonnées de f sont continues en a.
- La fonction f est dite continue sur I lorsque ses fonctions coordonnées sont continues sur I.
- On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1 si f et g sont des fonction continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et λ est une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $f+\lambda g$ est aussi continue sur I.
Si $n=3$, alors $f \wedge g$ est continue.
Si $n=2$, alors $\det(f,g)$ est continue. Etc...

II Dérivée en un point

Définition 3 Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $a \in I$.
f est dérivable en a si et seulement si $\tau_a(f)$ admet une limite $l \in \mathbb{R}^n$ en a.
Avec $\tau_a(f)(t) = \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ pour $t \in I$ et $t \neq a$.
Notation : $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} = f'(a) = \dfrac{df}{dt}(a)$

Proposition 2 (Autre formulation) f est dérivable en a si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall t \in I,\ f(t) = f(a) + (t-a)\ell + (t-a)\varepsilon(t) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t\to a} \varepsilon(t) = 0$$

Exemple 1 Pour $E = \mathbb{R}^2, f(t) = (x(t), y(t))$ coordonnées d'un point M en fonction du temps t.
$f'(t_0)$ représente la vitesse instantanée du point à l'instant t_0.

Proposition 3 (La dérivablilité en a entraine la continuité en a)
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
La réciproque est fausse.

Proposition 4 (Fonctions composantes f_i) f est dérivable en a si et seulement si chaque composante f_i est dérivable en a.

Exemple 2 Soit $u \in \mathbb{R}^n$ et $h : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable en a. On pose $f(t) = h(t).u$
Montrer que f est dérivable en a et calculer $f'(a)$.

Proposition 5 (Conséquences)

- **Fonctions à valeur dans $\mathbb{C}$:**
  $f : t \mapsto f(t) = a(t) + ib(t)$ avec $a = Re(f)$ et $b = Im(f)$
  f est dérivable en t_0 si et seulement si a et b sont dérivables en t_0.
- **Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension n :**
  Si $(e_1, e_2, ...e_n)$ est une base de F et si $g : I \to F$ avec $\forall t \in I, \quad g(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(t)e_i$,
  alors on peut définir la dérivée de g en a :
  g est dérivable en a si et seulement si $\forall i \in \{1, ..., n\} \quad g_i$ est dérivable en a
  Dans ce cas, on a $g'(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i'(t)e_i$

Définition 4 (Fonction dérivée)
f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point a de I.
f est dérivable sur I si et seulement si chaque composante f_i est dérivable sur I.

Exemple 3 Coordonnées polaires :
$\forall t \in I,\ f(t) = (r(t)\cos\theta(t); r(t)\sin\theta(t))$
On suppose r et θ dérivables sur I. Montrer que f est dérivable sur I et calculer $f'(t)$.

Exemple 4 Coordonnées cylindriques :
$\forall t \in I,\ f(t) = (r(t)\cos\theta(t); r(t)\sin\theta(t); z(t))$
On suppose r, θ et z dérivables sur I. Montrer que f est dérivable sur I et calculer $f'(t)$.

Exemple 5 Coordonnées sphériques :
$\forall t \in I,\ f(t) = \rho(t)(\sin\theta(t)\cos\phi(t); \sin\theta(t)\sin\phi(t); \cos\theta(t))$
On suppose r, θ et ϕ dérivables sur I. Montrer que f est dérivable sur I et calculer $f'(t)$.

Caractérisation des fonctions constantes

Proposition 6 (dem)
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$.
Alors f est constante si et seulement si : f est dérivable sur I et $\forall t \in I,\ f'(t) = 0$.

Exemple 6 Trouver un exemple de fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ montrant qu'il n'existe pas de généralisation du théorème de Rolle pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

III Opérations sur les fonctions dérivées

III.1 Combinaison linéaire d'applications dérivables

Proposition 7 (dem)
Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$ sont dérivables sur I, alors :

$$\text{pour tout } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda f + \mu g \text{ est dérivable sur } I$$

III.2 Composée avec une application linéaire : Lof

Proposition 8 (dem) Si $f \ \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto (f_1(t), ..., f_n(t)) \end{array} \right.$ et si $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ est une application linéaire, alors $Lof \ \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^q \\ t \mapsto L(f_1(t), ..., f_n(t)) \end{array} \right.$

Si f est dérivable sur I, alors Lof est dérivable sur I et : $\forall t \in I, \quad (Lof)'(t) = L(f'(t))$

III.3 Composée avec une application bilinéaire : $B(f, g)$

Proposition 9 (dem) Soit $B \ \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \\ (x, y) \mapsto B(x; y) \end{array} \right.$ une application bilinéaire.
Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$ deux applications dérivables sur I.
On pose $\forall t \in I,\ h(t) = B(f(t); g(t))$
Alors h est dérivable sur I et

$$\forall t \in I,\ h'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t); g'(t)).$$

Exemple 7 Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.
Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$ deux applications dérivables sur I et soit $<,>$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
On pose $h(t) =< f(t), g(t) >$.
Montrer que h est dérivable sur I et calculer $h'(t)$.

Remarque 2 Si $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, alors $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$ donc $\|f\|^2$ est dérivable et $\boxed{\left(\|f\|^2\right)' = 2\langle f', f\rangle}$
Application à un cercle ou une courbe tracée sur une sphère : Si pour tout r, $f(t)$ appartient à un cercle donné du plan ou à une shère donnée de l'espace, alors $\forall t \in I, \|f\|^2 = R^2$ donc $\left(\|f\|^2\right)' = 0$, ce qui permet d'affirmer, d'après la proposition ci-dessus, que $2\langle f', f\rangle = 0$ ou encore $f \perp f'$.

Exemple 8 **Dérivée d'un produit vectoriel**. On se place dans $\mathbb{R}^3$, espace euclidien orienté.
Soient f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, dérivables sur I.
Alors $f \wedge g$ est dérivable sur I et :

$$(f \wedge g)' =$$

Exemple 9 Soient f et g des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose $d(t) = det_{\mathcal{B}_0}(f(t), g(t))$. Montrer que la fonction d est dérivables et calculer $d'(t)$.

III.4 Composée avec une application p-linéaire : $M(f_1, \cdots, f_p)$

Proposition 10 (non exigible)
Soit $\quad M \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}^q \\ (x_1, \cdots, x_p) \mapsto M(x_1, \cdots, x_p) \end{array} \right\}$ une application p-linéaire.

On suppose que : $\forall i \in [\![1 ; p]\!]$, la fonction $f_i : I \to \mathbb{R}^n$ est une application dérivable sur I.
On pose $\forall t \in I$, $h(t) = M(f_1(t), \cdots, f_p(t))$.
Alors h est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \ h'(t) = \qquad\qquad\qquad .$$

Exemple 10 Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^p$. On suppose que $f_1, \cdots, f_p$ sont des applications définies sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et dérivables sur I.
Soit $d \, : \, t \mapsto Det_{\mathcal{B}}\left(f_1(t), \cdots, f_p(t)\right)$. Alors d est dérivable et de plus $d'(t) =$

III.5 Composée $fo\phi$

Proposition 11 (dem) Soient $\phi : J \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ avec $\phi(J) \subset I$ et soit $a \in J$.

- Si ϕ est dérivable en a et si f est dérivable en $b = f(a)$, alors $fo\phi$ est dérivable en a et de plus
$$(fo\phi)'(a) = \phi'(a) \times f'(\phi(a))$$
- Si ϕ est dérivable sur J et si f est dérivable sur I, alors $f \circ \phi$ est dérivable sur J et de plus :
$$(f \circ \phi)' = \phi' \times f' \circ \phi$$

Exemple 11 $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = e^t$ et $f(t) = (\cos t, \sin t)$.
On pose $h(t) = fo\phi(t)$. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(t)$.

IV Fonctions de classe C^1

Définition 5 $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dite « de classe $\mathcal{C}^1$ » lorsque f est dérivable sur I et $f' : I \to \mathbb{R}^n$ est continue.

Proposition 12 (Propriétés)
- $\mathcal{C}^1(I,E) = \{f : I \to \mathbb{R}^n, \text{ de classe } \mathcal{C}^1\}$ est un espace vectoriel.
- Si $L : E \to F$ est linéaire et si $\in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$, alors $Lof : I \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Si $B : E \times F \to G$ est bilinéaire,et si $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $t \to B(f(t); g(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- Si ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (avec $\phi(J) \subset I$), alors $fo\phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J

Proposition 13 (Théorème de limite de la dérivée. (dem)) Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ continue sur I. Soit $a \in I$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ et que f' admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^n$ en a. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

V Fonctions de classe C^k

Définition 6 Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$.
- f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $I \iff f$ est continue sur I
- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \iff f$ est dérivable sur I et f' est de classe C^{k-1} sur I.
- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \iff f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier k.

Exemple 12 Si $E = \mathbb{R}^2$, pour $f(t) = (x(t); y(t))$ avec $t = temps$, le vecteur $f''(t_0)$ est le vecteur accélération à l'instant t_0.

Proposition 14 (Propriétés)
- $C^k(I,E) = \{f : I \to \mathbb{R}^n, C^k\}$ est un espace vectoriel.
- Si $L : \mathbb{R}^n \to F$ est linéaire et si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$, alors $L \circ f : I \to F$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
- Si $\phi \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ et si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ (avec $\phi(J) \subset I$), alors $f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.

Proposition 15 (Formule de Leibniz) Soit $B \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q \\ (x,y) \mapsto B(x;y) \end{array} \right.$ une application bilinéaire.

Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,

alors $B(f,g) : I \to \mathbb{R}^q$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et : $\quad (B(f,g))^{(k)} = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} B(f^{(p)}; g^{(k-p)})$

Exemple 13 Soient f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\lambda \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$. Alors :

- λf est de classe $\mathcal{C}^k$ et de plus : $(\lambda f)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{(k-i)} f^{(i)}$
- $\langle f, g\rangle$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et de plus : $(\langle f, g\rangle)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \langle f^{(i)}, g^{(k-i)}\rangle$
- Pour $n = 3$, le produit vectoriel $f \wedge g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et de plus : $(f \wedge g)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} \wedge g^{(k-i)}$
- Si $n = 2$, et si on pose $d(t) = det_{\mathcal{B}_0}(f(t), g(t))$, alors d est de classe $\mathcal{C}^k$ et de plus $d^{(k)}(t) =$