1) Pour se mettre en jambes

****Exercice 1** On considère $p = 2$ ou 3 et on se place dans $E = \mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ tel que l'ensemble des points intérieurs à F est non vide. Montrer que $F = E$.

♡***Exercice 2** Représenter dans le plan chacun des ensembles suivants et déterminer ceux qui sont : bornées, ouverts, fermés....

1. $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > a\}$ où a est un réel fixé.
2. $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \neq 0\}$
3. $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \geq 1\}$
4. $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| > 1 \text{ et } y < 2\}$
5. $A_5 = \mathbb{R}\times]-1, 1]$
6. $A_6 = \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$
7. $A_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ ux + vy + w = 0\}$ où u, v et w sont des réels fixés, tels que $(u, v) \neq (0, 0)$.

***Exercice 3** Déterminer $\mathcal{D}_f$ pour chacune des fonctions f_k suivantes, puis représenter $\mathcal{D}_f$.

1. $f_1(x, y) = \ln(xy)$
2. $f_2(x, y) = \ln(x) + \ln(y)$
3. $f_3(x, y) = x^y$
4. $f_4(x, y) = \sqrt{x + y}$

2) Continuité

♡***Exercice 4** Soit f une application définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose que $f((2, 0)) = 1$ et que $f((-2, 0)) = -1$. Montrer que : $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f((x, y)) = 0$.
2. On suppose que : $\exists (x_1, y_1)$ tel que $f((x_1, y_1)) > 0$ et $\exists (x_2, y_2)$ tel que $f((x_2, y_2)) < 0$.
   Montrer qu'il existe alors (x_3, y_3) tel que $f((x_3, y_3)) = 0$.

♡***Exercice 5** Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que : } x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ x - y \leq 1\}$.

1. Représenter E. Montrer que E est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.
2. On considère la fonction f définie par $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 9} \times \sin((\sqrt{x^2 + y^2})$.
   Chercher le domaine de définition de f, puis justifier que f est bornée sur E.

****Exercice 6** a) On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne si il existe un réel k tel que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ \ |f(x) - f(y)| \leq k\,||x - y||$. Montrer qu'une fonction lipschitzienne est continue.
b) On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne par rapport à la première variable si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3,\ \ |f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

On définit de manière analogue les fonctions lipschitziennes par rapport à la deuxième variable. Montrer que si une fonction est lipschitzienne par rapport aux deux variables, alors elle est continue.

3) Dérivées partielles d'ordre 1 : existence et interprétation

♡****Exercice 7** Calculer les dérivées partielles des applications suivantes et montrer qu'elle sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à préciser.

(a) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x(x - 2)}$ (b) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + e^y}}{\ln(xy)}$

*****Exercice 8** Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$

1. Montrer qu'en tout point de $\mathbb{R}^2$, f admet des dérivées partielles par rapport à x et à y et les déterminer.
2. Quelle est la valeur de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ pour tout $y \neq 0$? La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

♡***Exercice 9** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(\cos(t), \ln(1 + t^2))$.
Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer la fonction g'.

***Exercice 10** Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = y^2 - xy + 4$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\nabla f_{(2,0)}$, $\nabla f_{(0,2)}$, $\nabla f_{(0,0)}$. Interpréter géométriquement.
2. Donner un DL_1 en $(2, 0)$ de f.
3. Montrer que f est bornée sur $[-1, 2] \times [2, 3]$.

****Exercice 11** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On dit que f est homogène de degré n si : $\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

1. Montrer que si f est homogène de degré n, alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $n-1$. Indication : on peut fixer t et considérer l'application $((x, y) \mapsto (tx, ty) \mapsto f(tx, ty) = t^n f(x, y))$
2. Montrer que si f est homogène de degré n, alors : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$.
   Indication : considérer $(t \mapsto (tx, ty) \mapsto f(tx, ty))$, la variable étant t, les réels x et y étant fixés.

4) Quelques équations aux dérivées partielles

♡***Exercice 12** Déterminer l'ensemble des fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$.
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(x)$ où h est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(y)$ où h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

♡****Exercice 13** Résoudre, en utilisant les coordonnées polaires :

1. $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.
   Résoudre la même équation pour $(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. Expliciter (r,θ) en fonction de (x,y) dans chacun des cas.
2. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$ sur $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y \neq 0 \text{ ou } x > 0\}$.

Exercice 14 1) Montrer que l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\phi(x,y) = (x-y, x+y)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et que sa réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.
2) Soit k un réel fixé. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante : $f + \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = k$
Indication : on peut poser $u = x - y$ et $v = x + y$.

♡****Exercice 15** 1) Soit ϕ définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times]-\pi/2, \pi/2[$ par : $\phi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (x,y)$. Montrer que ϕ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*} \times]-\pi/2, \pi/2[$ vers $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. Donner sa réciproque ϕ^{-1} ; justifier que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2) Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} - f = x^2 + y^2 + 1$.
On pourra effectuer le changement de variable $(x,y) = \phi(r,\theta)$ en justifiant sa validité.

♡****Exercice 16** 1) Soit ϕ l'application définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ par : $\phi(x,y) = \left(\sqrt{xy}, \dfrac{y}{x}\right)$. Montrer que ϕ réalise une bijection de $(\mathbb{R}^{+*})^2$ vers $(\mathbb{R}^{+*})^2$ et expliciter sa réciproque. Justifier que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2) On considère l'équation aux dérivées partielles suivantes, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$: $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$
Soit $F = f \circ \phi^{-1}$. Donner l'équation aux dérivées partielles vérifiée par F et la résoudre.

♡****Exercice 17** Soit $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y > 0\}$. Soit g une fonction continue sur P. On considère l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = g(x,y).$$

1. Dans cette question, on suppose que $g = 0$. Montrer que f vérifie E si et seulement si $f(x,y) = h(x+y)$ où h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (on pourra effectuer le même changement de variable que dans l'exercice 19).
2. On suppose que g est de la forme $g(x,y) = \lambda(x)k(x+y)$ où λ et h sont des fonctions continues sur leurs domaines de définition. Soit λ_1 une primitive de λ. Montrer que la fonction f définie par $f(x,y) = \lambda_1(x)k(x+y)$ est une solution particulière de E.
3. Quel résultat a-t-on si $g(x,y) = \lambda(y)k(x+y)$?