Exercice 1 On considère la fonction définie par :
$\forall t \in]-1,0]$, $f(t)=0$ et $\forall t \in]0,1[$, $f(t)=(t^2\sin(\frac{1}{t}), t^2\cos(\frac{1}{t}))$
Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$.
f est-elle deux fois dérivable sur $]-1,1[$?

Exercice 2 Soient f et g définies sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$.
On suppose que pour tout réel $x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$.

1. Comment choisir la constante A pour que la fonction h définie par $h(x)=f(x)-Ag(x)$ vérifie $h(a)=h(b)$?
2. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Exercice 3 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 4 $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(t)| \leqslant n!$.

Exercice 5 Soit $P : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$.
On suppose que pour tout réel t, la matrice $P(t)$ est telle que $(P(t))^T \times P(t) = I$.
Montrer que pour tout réel t, la matrice $(P(t))^T \times P'(t)$ est antisymétrique.

Exercice 6 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans E, deux fois dérivables sur I et telle que :$\forall t \in \mathbb{R}$, $\|f(t)\|$ est constante.
Montrer que le produit scalaire $< f(t); f''(t) >$ est toujours négatif.
Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 7 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geqslant 2$) .
$\forall t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t)=\det(Id+tu)$
Montrer que f est dérivable en 0, puis calculer $f'(0)$.

Exercice 8 On note Det le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $<,>$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
f, g, h et k désignent des applications de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1. On note $\phi = \det(f,g)$. Montrer que ϕ est de classe C^1 sur I et calculer ϕ'.
2. On pose $F = < f, \det(g,h)k >$. Montrer que F est de classe C^1 sur I et calculer F'.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Démontrer (par récurrence) que si $f_1, f_2, ..., f_n$ sont des éléments de $C^1(I,\mathbb{R}^n)$ alors $\det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, ..., f_n)$ est de classe C^1 sur I, et :

$$(\det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, ..., f_n))' = \det_{\mathcal{B}}(f_1', f_2, ..., f_n) + \det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2', ..., f_n) + ... + \det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, ..., f_n')$$

Exercice 10 Application de l'exercice précédent : Calcul de déterminants par dérivation :

1. Pour tout x réel, $A(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & x \\ x & x+a_2 & x \\ x & x & x+a_3 \end{vmatrix}$, $B(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 & \ddots & & \vdots \\ \frac{x^3}{6} & \frac{x^2}{2} & x & \ddots x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots x & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & \dots & x \end{vmatrix}$$

   Montrer que D_n est de classe C^1 et calculer D_n'.
   En déduire D_n.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & .... & 1 \\ 1 & x+1 & ... & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & .... & ... & x+1 \end{vmatrix}$

Exercice 11 Résolution de systèmes différentiels :
On chercher les fonctions $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ qui vérifient pour tout réel t :

$$S \quad \begin{cases} x'(t) &= 2x(t) + y(t) + 3z(t) \\ y'(t) &= 2y(t) \\ z'(t) &= x(t) \end{cases}$$

On note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

1. Ecrire le système différentiel sous la forme $X' = AX$, où A est une matrice de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Construire une matrice P inversible de taille 3, telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
3. On pose $X = PY$ avec $Y \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Quel est le système différentiel vérifié par Y ?
4. Expliciter $Y(t)$ pour tout réel t.
5. En déduire les solutions du système S.

Exercice 12 En s'inspirant de l'exercice précédent, résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -x(t) + 3y(t) \end{cases}$$