

Déroulement : La colle comporte cette semaine pour tout le monde **plusieurs** questions de cours, suivies de un ou deux exercices.
Les définitions et énoncés de théorèmes/propriétés doivent être connus...

I : Révisions de PCSI sur les fonctions de deux variables

Tout le programme de PCSI sur les fonctions de deux variables est censé être connu.

II : Espaces vectoriels normés

Cette section vise les objectifs suivants :

- généraliser au cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel;
- fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.

a) Normes Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{K}^n . Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. Norme $\|\cdot\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans \mathbb{K} .

L'égalité $\sup(kA) = k \sup(A)$ pour A partie non vide de \mathbb{R} et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.

Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère.

Partie convexe. Convexité des boules.

Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.

b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé Convergence et divergence d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.

c) Comparaison des normes Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.

Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.

La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.

d) Topologie d'un espace vectoriel normé Point intérieur à une partie. Ouvert d'un espace normé. Une boule ouverte est un ouvert. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.

Fermé d'un espace normé. Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés. Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.

Point adhérent à une partie, adhérence. Partie dense. L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.

Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

e) Limite et continuité en un point Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition. Caractérisation séquentielle. Opérations algébriques sur les limites, composition. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.

f) Continuité sur une partie Opérations algébriques, composition.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Si f est une application continue de E dans \mathbb{R} alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geq 0$ sont des fermés.

Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.

g) Espaces vectoriels normés de dimension finie Équivalence des normes en dimension finie. La démonstration est hors programme.

La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Théorème des bornes atteintes (admis) : toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.

Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales. Exemples du déterminant, du produit matriciel.

La notion de norme subordonnée est hors programme.

Les questions de cours sont sur la page suivante.

III : Questions de cours

1. Révisions de PCSI sur les fonctions de deux variables.

- la continuité d'une application implique celle des applications partielles.
- Définition d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 .
- Gradient d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Expression du développement limité à l'aide du gradient (énoncé).
- Définition d'un point critique. Caractérisation des extrema à l'aide du gradient (énoncé).

2. Espaces vectoriels normés.

- Définition et premières propriétés d'une norme.
- Définition de la convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé.
- Définition de 2 normes équivalentes
- Ouvert, fermé : définitions
- Propriétés sur les intersections / réunions d'ouverts, fermés (dem)
- Adhérence, Intérieur, partie dense (définitions)
- Caractérisation séquentielle de l'adhérence (dem)
- Partie convexe définition
- Image réciproque d'un ouvert/fermé par une fonction continue (énoncé)
- Equivalence des normes en dimension finie (énoncé)
- Extrema d'une fonction à valeurs réelles, continue sur un fermé borné (énoncé)
- Continuité des applications linéaires en dim finie (dem)
- Continuité des applications bilinéaires (énoncé)