Table des matières

I Extrait du programme de PCSI

Fonctions de deux variables

Le but de cette section, dont le contenu sera entièrement repris dans un cadre plus général en seconde année, est de familiariser les étudiants avec les calculs sur les dérivées partielles, notamment avec la « règle de la chaîne », et de développer une vision géométrique des fonctions de deux variables.

a) Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues

Boules de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique. Ouverts.
Continuité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Représentation graphique d'une fonction de deux variables par une surface.
La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel.

b) Dérivées partielles

Dérivées partielles en un point d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.
Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert. Définition par la continuité des dérivées partielles.
Développement limité à l'ordre 1 au point (x_0, y_0) d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ (admis) :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ et l'interprétation de

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

comme équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface d'équation $z = f(x, y)$.
Gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Notation $\nabla f(x_0, y_0)$.
Expression du développement limité à l'aide du gradient. Le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.

c) Dérivées partielles et composées

Dérivée selon un vecteur. Expression à l'aide du gradient $\langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle$.
Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(x(t), y(t))\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

Interprétation comme dérivée de f le long d'un arc γ donné par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et expression à l'aide du gradient

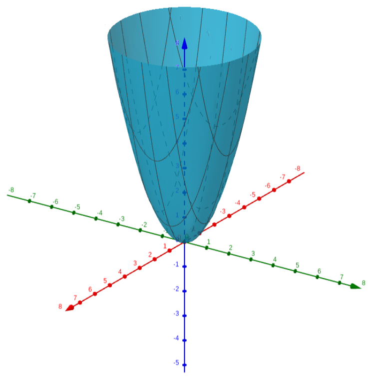
$$(f \circ \gamma)'(t) = \left\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle$$

où $\gamma'(t)$ est défini par $(x'(t), y'(t))$.
Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.
Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.

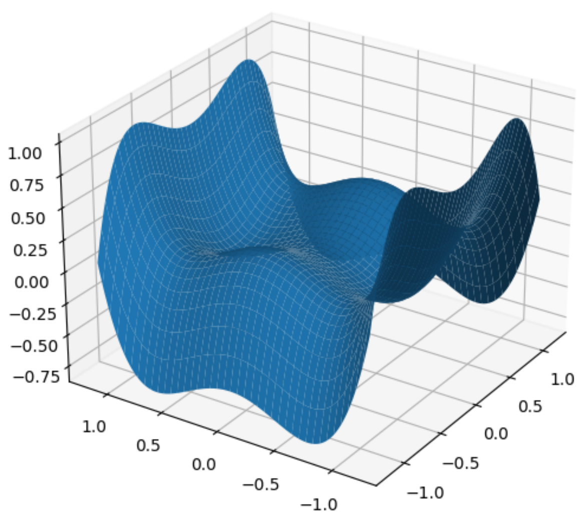
d) Extremums

Maximum et minimum, local ou global d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$.
Point critique. Tout extremum local d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un point critique.
Exemples d'étude de points critiques.

Visualisation d'une fonction de 2 variables, à valeurs dans $\mathbb{R}$ On « dessine »la surface d'équation $z = f(x, y)$.
Par exemple, pour $f : (x, y) \mapsto -(x^2 + y^2)$, on obtient :



Par exemple, pour $f : (x, y) \mapsto -x^4 + y^4 - (9/10)y^2 + x^2$, on obtient :



II Applications partielles, continuité

Définition 1 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.
La j-ème application partielle de f en a est l'application $t \mapsto f(a_1, .., a_{j-1}, \underbrace{a_j + t}, a_{j+1}, ...a_p)$.

Proposition 1 (Continuité de f et continuité des applications partielles) (dem)
Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est continue sur $\mathbb{R}^p$, alors toutes ses applications partielles sont continues.
- La réciproque est fausse.

Exemple 1 $\forall (x,y) \neq (0,0) \quad f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$

Exemple 2 Peut-on prolonger par continuité sur $\mathbb{R}^2$, la fonction définie par :

$$\forall (x,y) \neq (0,0) \quad f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

III Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

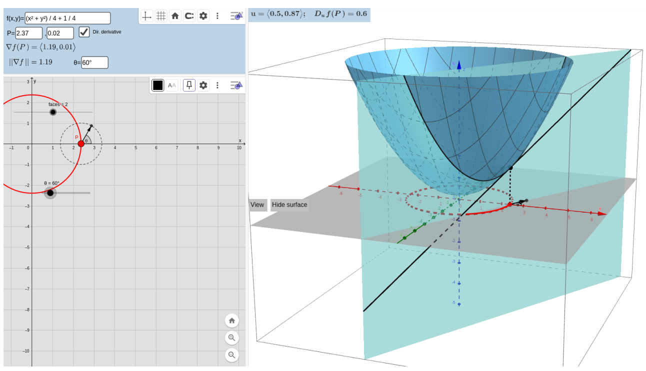
L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, cette section se consacre à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. On se limite en pratique au cas $p = 2$ ou $p = 3$.

III.1 Dérivée selon un vecteur

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ...x_p) & \mapsto & f(x_1, ..x_p) \end{cases}$
Soit $a = (a_1, ...a_p)$ un élément de U .
$\mathcal{U}$ est un ouvert de de $\mathbb{R}^p$, donc il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$.
Soit $v \in \mathbb{R}^p$, non nul.
Alors pour $|t| < \dfrac{r}{\|v\|}$, on peut dire que $a + tv \in B(a,r)$ et donc $f(a+tv)$ est bien défini.
Nous avons justifié que : quel que soit le vecteur $v \in \mathbb{R}^p$, l'application $t \mapsto f(a+tv)$ est définie au voisinage de 0.

Définition 2 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ...x_p) & \mapsto & f(x_1, ..x_p) \end{cases}$
Soit $a = (a_1, ...a_p)$ un élément de U et soit $v \in \mathbb{R}^p$.
Lorsque la fonction $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0 , on note $\mathrm{D}_v f(a)$ cette dérivée en 0, que l'on appelle **la dérivée en a selon le vecteur v.**

Exemple 3 On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1+x^2+y^2}{4}$.
On se donne un vecteur $v = (\cos(\theta)\sin(\theta))$ et un point $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de f en P selon le vecteur v.



III.2 Dérivées partielles

Lorsque $v = \mathrm{e}_j$ est le j^{e} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, l'application $(t \mapsto f(a+tv))$ prend la forme suivante :

$$t \mapsto f\left(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_p\right)$$

On reconnaît la j-ème application partielle. Ainsi la dérivée de f en a selon le vecteur $v = e_j$ (si elle existe) est la dérivée (en 0) de la j-ème application partielle de f en a.

Définition 3 (Dérivée partielle en un point)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ...x_p) & \mapsto & f(x_1, ..x_p) \end{array} \right.$

Soit $a = (a_1, ...a_p)$ un élément de U et j un entier de $\{1, ..., p\}$.

f admet une dérivée partielle par rapport à la j-eme variable, au point a si la j-ème application partielle est dérivable en 0 :
On a alors : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, .., a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, ...a_p) - f(a)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_j f(a)$
Si f admet une dérivée partielle par rapport à la j-ème variable en tout point de U, alors on peut définir la j-ème dérivée partielle $\left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \partial_j f(x) \end{array} \right.$

Exemple 4 Expliciter les dérivées partielles de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \ln(1 + x^2 + y^2) \end{array} \right.$

Exemple 5 Expliciter les dérivées partielles de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^3 + 2x^4y^3 + 5yz^2 \end{array} \right.$

Exemple 6 On reprend l'exemple 1 : $\forall (x, y) \neq (0, 0) \quad f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$
f admet-elle des dérivées partielles en (0,0) ?

Proposition 2 (Premières propriétés) Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. On note $a \in U$ et $j \in \{1, ...p\}$
On suppose que f et g admettent des dérivées partielles par rapport à x_j au point a.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions λf et $f + g$ ont des dérivées partielles par rapport à x_j en a :
$$\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_j}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial(f+g)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$$
- Le produit $f \times g$ admet une dérivée partielle par rapport à x_j en a et :
$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \times g(a) + \frac{\partial g}{\partial x_j}(a) \times f(a)$$
- Si $\phi : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I, avec $f(U) \subset I$, alors $\phi o f$ admet une dérivée partielle par rapport à x_j en a :
$$\frac{\partial(\phi o f)}{\partial x_j}(a) = \phi'(f(a)) \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$
- Si f ne s'annule pas en a, alors $\dfrac{1}{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à x_j en a :
$$\frac{\partial(1/f)}{\partial x_j}(a) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)}{f(a)^2}$$

III.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 4 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur si toutes ses dérivées partielles sont définies **et** **continues** sur U.

On note $\mathcal{C}^1(U)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1

- Toute fonction constante est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Tout projecteur $\pi_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & x_k \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.
- Toute application linéaire $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & a_1 x_1 + ... + a_p x_p \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.
- Toute fonction polynomiale $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

Définition 5 (Généralisation) $f \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & (f_1(x), ...f_n(x)) \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si toutes ses applications composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$.
On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple 7 $N_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & \sqrt{x_1^2 + ... + x_p^2} \end{array} \right.$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$?

III.4 Théorème fondamental

Proposition 3 (Théorème fondamental du calcul différentiel) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & f(x_1, ..., x_p) \end{array} \right.$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U de $\mathbb{R}^p$ et soit $a \in U$.
Alors, au voisinage de 0, c'est-à-dire, lorque $h = (h_1, ...h_p)$ est proche de $0_{\mathbb{R}^p}$ on a :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|h\|)$$

Exemple 8 Illustrer le théorème précédent avec la fonction $f : (x, y, z) \mapsto xy\cos(z) - y^2 z$ et $a = (1, 2, \pi)$

Définition 6 Soit $f : U \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
On dit que f a un développement limité d'ordre 1 en $a \in U$ lorsque

$$\exists (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \text{et } r > 0 \text{ tels que, pour } h \in B(0, r),\ f(a+h) \underset{\|h\| \to 0}{=} f(a) + \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k h_k \right) + o(\|h\|).$$

Proposition 4 D'après le théorème fondamental, si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors f admet en tout $a \in U$ un développement limité de la forme

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|h\|)$$

.

Proposition 5 (Caractère C^1 et continuité. (dem)) Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur un ouvert U, alors f est continue.

III.5 Opérations algébriques sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

- Combinaison linéaire
  Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, alors toute combinaison linéaire de f et g appartient aussi à $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.
- Produit Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, alors le produit fg est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
  Conséquence : toute fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Composition
  Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et si $\phi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ avec $f(U) \subset I$, alors $\phi \circ f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.
- Inverse et quotient
  Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et si f ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.
  Conséquence : toute fraction rationnelle (quotient de 2 fonctions polynomiales) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

III.6 Gradient, expression de la dérivée selon un vecteur à l'aide du gradient

Définition 7 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Le gradient de f en a est le vecteur de $\mathbb{R}^p$, noté $\nabla f(a)$ ou (ou encore $\mathrm{grad}(f)(a)$) défini par :

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), ..., \partial_p f(a))$$

Exemple 9 $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = x^3 e^y + \ln(1 + y^4 + z^2)$.
Expliciter le gradient de f en $(0, 0, 0)$.

Proposition 6 Reformulation de la propriété 4
D'après le théorème fondamental, si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors f admet en tout $a \in U$ un développement limité de la forme

$$f(a + h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|)$$

.

Remarque 2 L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $< \nabla f(a), h > \leqslant \|\nabla f(a)\|$ pour h unitaire ; avec égalité si et seulement si h et $\nabla f(a)$ sont colinéaires et de même sens.
Interprtation géométrique : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale, et de même sens.

Proposition 7 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^p$ et pour tout $a \in U$, la fonction f admet en a une dérivée selon le vecteur v. De plus :

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

Remarque 3 Dans le cas où $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors la surface d'équation $z = f(x, y)$ a pour plan tangent au voisinage de a le plan d'équation

$$z = f(a) + \langle \nabla f(a), (x - x_a, y - y_a) \rangle.$$

IV Différentielle

IV.1 Différentielle en un point

Définition 8 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

- On dit que f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ lorsqu'il existe une application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que :
$$f(a+h) \underset{\|h\| \to 0}{=} f(a) + u(h) + \mathrm{o}(\|h\|).$$
Dans ce cas, l'application linéaire u est appelée la différentielle de f en a, et sera notée $\mathrm{d}f(a)$. Ainsi, on écrira :
$$f(a+h) \underset{\|h\| \to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \mathrm{o}(\|h\|)$$
$$\text{ou encore} \quad : \quad f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot (x-a) + \mathrm{o}(\|x-a\|)$$
- Lorque f est différentiable en tout point de U, on appelle **différentielle de** f l'application
$$df : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \\ a & \mapsto & df(a) \end{array} \right.$$

Théorème 1 Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U, alors f est différentiable en tout point $a \in U$. La différentielle de f en a est l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$df(a) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (h_1, ...h_p) & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} h_j \times \partial_j f(a) = \langle \nabla f(a), h \rangle \end{array} \right.$$
Notation : pour tout $h = (h_1, ...h_p) \in \mathbb{R}^p$, on note $df(a)(h) = df(a).h$

Exemple 10 $\pi_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & x_k \end{array} \right.$
Déterminer la différentielle de π_k en un point a de $\mathbb{R}^p$.

Exemple 11 On considère la forme linéaire $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} b_j x_j \end{array} \right.$
Déterminer la différentielle de u en un point a de $\mathbb{R}^p$.

Exemple 12 On considère la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} b_j x_j^2 \end{array} \right.$
Déterminer la différentielle de u en un point a de $\mathbb{R}^p$.

Proposition 8 (Calculs de différentielles) Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$ et soit λ et μ deux réels.
- **Combinaison linéaire** : $d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$
- **Produit** : $d(f \times g)(a) = f(a) \times dg(a) + g(a) \times df(a)$
- **Inverse** : si $f(a) \neq 0$, alors $d(1/f)(a) = -\dfrac{df(a)}{f(a)^2}$
- **Composition** : si $\phi : I \to \mathbb{R}$ avec $f(U) \subset I$, alors $d(\phi o f)(a) = \phi'(f(a)) \times df(a)$

IV.2 Règle de la chaine

IV.2.a Dérivation de $t \to f(x_1(t), ..., x_p(t))$

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
On considère $\Phi : t \in I \mapsto (x_1(t), ..., x_p(t))$ une fonction vectorielle **de la variable réelle** telle que :

$$\forall t \in I,\ \Phi(t) \in U$$

On étudie la dérivée de $t \to f(x_1(t), ..., x_p(t))$

Proposition 9 (Règle de la chaine. (dem)) Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ et soit $\Phi : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto & (x_1(t), ...x_p(t)) \end{array} \right.$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\Phi(I) \subset U$.
Alors $g = f \circ \Phi : t \mapsto g(t) = f(x_1(t), ..., x_p(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = \sum_{k=1}^{p} x_k'(t) \times \partial_k f(\Phi(t))$$

Exemple 13 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
Expliciter la dérivée de $t \mapsto f(t^2, 7\ln(1+t^2), e^t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

Remarque 4 En particulier, la règle de la chaine peut se noter : $\dfrac{d(fo\phi)}{dt} =< \phi'(t), \nabla f(\phi(t)) >$.

IV.2.b Caractérisation des fonctions constantes sur un convexe

Proposition 10 ((dem)) Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1.
La fonction f est constante si et seulement si ses dérivées partielles sont toutes nulles.

IV.2.c Application aux changements de variables

L'objectif de ce paragraphe est le calcul des dérivées partielles de

$$(u_1, \cdots, u_n) \mapsto f(x_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, x_n(u_1, \cdots, u_n)).$$

Cas de deux variables Dans un premier temps : on se donne

$$f\ :\ (x, y) \mapsto f(x, y) \quad \text{et} \quad \phi\ : (\phi_1(u, v), \phi_2(x, y)).$$

On suppose ces deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Et l'on cherche à calculer les dérivées partielles de

$$(u, v) \mapsto H(u, v) = f(\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)).$$

Rappelons que les dérivées partielles sont les dérivées des applications partielles :

$$\partial_1 H(u_0, v_0) = \lim_{t\to 0} \frac{H(u_0 + t, v_0) - H(u_0, v_0)}{t} = \lim_{t\to u_0} \frac{H(t, v_0) - H(u_0, v_0)}{t - u_0} = \frac{d\left(f(\phi_1(t, v_0), \phi_2(t, v_0))\right)}{dt}(u_0).$$

On utilise donc la règle de la chaîne pour dériver la fonction $(t \mapsto f(\phi_1(t, v_0), \phi_2(t, v_0))$
On obtient alors :

De même : pour calculer $\partial_2 H(u_0, v_0)$ on dérive la fonction $t \mapsto$

Conclusion : Si $f\ :\ (x,y) \mapsto f(x,y)$ et $\phi\ :(u,v) \mapsto (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v))$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et si $f \circ \phi$ est bien définie, alors $g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de plus

$$\begin{cases} \partial_1(g)(u,v) = \partial_1(f \circ \phi)(u,v) = \partial_1(\phi_1) \cdot \partial_1(f) \circ \phi + \partial_1(h_2) \cdot \partial_2(f) \circ \phi \\ \partial_2(g)(u,v) = \partial_2(f \circ \phi)(u,v) = \partial_2(\phi_1) \cdot \partial_1(f) \circ \phi + \partial_2(h_2) \cdot \partial_2(f) \circ \phi \end{cases}$$

Exemple 14 Changement de variables affines.
Soit $f : \begin{cases} U & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto f(x,y) \end{cases}$
On pose le changement de variable $\begin{cases} x & = & au + bv + x_0 \\ y & = & cu + dv + y_0 \end{cases}$
Ce changement de variable est bijectif si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible. On suppose que c'est le cas.
On note $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad (au + bv + x_0, cu + dv + y_0) \in U\}$ et pour tout $(u,v) \in V$,
on peut poser $g(u,v) = f(au + bv + x_0, cu + dv + y_0)$
Déterminer les dérives partielles de g en fonction de celles de f

Exemple 15 Coordonnées polaires.
Cette fois ci, on pose le changement de variables :
$\begin{cases} x & = & r\cos(\theta) \\ y & = & r\sin(\theta) \end{cases}$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

1. On note $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$
   Expliciter les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
2. Calculer $\nabla(f)(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de g (calcul du gradient en coordonnées polaires).

Cas de n variables De la même manière, se donne :

- $\phi\ :\ (u_1, \cdots, u_n) \mapsto \big(\phi_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, \phi_n(u_1, \cdots, u_n)\big)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \subset \mathbb{R}^n$
- $f\ :\ (x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $V \subset \mathbb{R}^n$
- on suppose $\phi(U) \subset V$

Alors la fonction $g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et de plus :

$$\partial_i(g) = \sum_{k=1}^{n} \partial_i(\phi_k) \cdot \partial_k(f) \circ \phi$$

$$\partial_i(g)(u_1, \cdots, u_n) = \sum_{k=1}^{n} \partial_i(\phi_k)(u_1, \cdots, u_n) \cdot \partial_k(f)\big(\phi_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, \phi_n(u_1, \cdots, u_n)\big)$$