Table des matières

I Fonction de classe $\mathcal{C}^2$

I.1 Dérivées partielles d'ordre 2

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$
Les dérivées partielles d'ordre 1, lorsqu'elles existent en tout point de U sont des applications de U dans $\mathbb{R}$, on peut alors étudier leurs dérivées partielles.

Définition 1 (Dérivées partielles d'ordre 2)
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
Lorsqu'elle existe, la fonction $\partial_i(\partial_j f)$ est appelée dérivée partielle de f selon les indices (i, j) et notée $\partial^2_{i,j} f$ ou $\partial_i\partial_j(f)$ ou aussi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$
On appelle dérivée partielle d'ordre 2 de f une dérivée partielle d'une dérivée partielle de f.

Exemple 1 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^3 y - 5e^{xy} + \ln(1 + x^4)$
Expliciter les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

I.2 La classe $\mathcal{C}^2$

Définition 2 Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^2$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur U.
On note $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de U vers $\mathbb{R}$.

Exemple 2 Toute fonction constante de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$ est de classe C^2.

Exemple 3 $\pi_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & x_k \end{array} \right.$
Vérifier que π_k est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^p$.

Exemple 4 Donner d'autres exemples de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

I.3 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Proposition 1 (Combinaison linéaire, produit et inverse)
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, alors
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
- la fonction $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
- si f ne s'annule pas sur U, la fonction $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

Remarque 1 Conséquences :
- $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
- Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$.
- Les fractions rationnelles sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout ouvert où elles sont définies.

Proposition 2 (Composition) Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : V \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et $g : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R}^p \\ (u_1, ..., u_q) & \mapsto & (g_1(u_1, ...u_q), ..., g_p(u_1, ..., u_q)) \end{cases}$
On suppose que chaque fonction g_i est de classe C^2 sur U et que $g(U) \subset V$,
alors la fonction $fog : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R} \\ (u_1, ..., u_q) & \mapsto & f(g_1(u_1, ...u_q), ..., g_p(u_1, ..., u_q)) \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

Exemple 5 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = f(2x + 3y, xy)$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2, en fonction de celles de f.

I.4 Théorème de Schwarz

Proposition 3 (Théorème de Schwarz (admis))
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Alors :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, ..p\}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Exemple 6 Illustrer le théorème de Schwarz à l'aide de deux exemples de votre cru.

Remarque 2 L'existence des dérivées partielles croisées ne suffit pas pour démontrer qu'elles sont égales :

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Déterminer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Conclusion ?

I.5 Matrice hessienne, formule de Taylor à l'ordre 2

Définition 3 (Matrice hessienne)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in U$.
La matrice Hessienne de f en a est la matrice $H_f(a) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{(i,j)\in\{1,..,p\}^2}$
Le théorème de Schwarz entraine que $H_f(a)$ est une matrice symétrique de $M_p(\mathbb{R})$.

Exemple 7 Ecrire la hessienne de f en a pour :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$ avec $a = (1,1)$
2. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + xyz$ en (a,b,c).

Proposition 4 (Formule de Taylor-Young. (admis))
Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $(a+h) \in U$. On pose X la matrice des coordonnées de h dans la base canonique. Alors , lorsque $h \to 0_{\mathbb{R}^p}$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + < \nabla f(a), h > \; + \frac{1}{2} X^T \, H_f(a) \, X \; + \; o(\|h\|^2)$$

en détaillant :

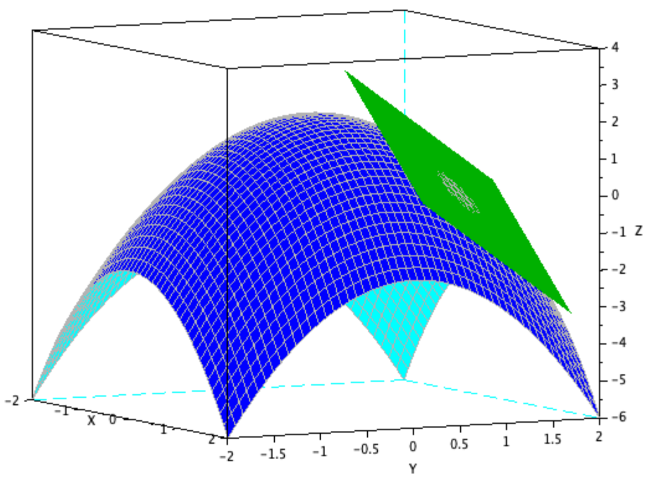
$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j\right) + o(\|h\|^2)$$

Exemple 8 Ecrire la formule de Taylor Young pour chacune des deux fonctions de l'exemple précédent.

Interprétation géométrique de ce développement limité d'ordre 2 plan tangent et position par rapport au plan tangent

function z=f(x,y)
$z = 2 - x^2 - y^2$
endfunction
function z=g(x,y)
$z = -2*x - 2*y + 4$
endfunction

x=linspace(-2,2,50)
y=x
z=feval(x,y,f)
u=linspace(0.2,1.8,50)
v=u
t=feval(u,v,g)
plot3d(x,y,z)
plot3d(u,v,t,flag=[-14,8,4])



II Extrema

II.1 Définitions

Définition 4 (Extremum global) Soit $f : A \to \mathbb{R}$ avec A partie de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in A$.
f admet un minimum global en a si $\quad \forall x \in A,\ f(x) \geqslant f(a)$
f admet un maximum global en a si $\quad \forall x \in A,\ f(x) \leqslant f(a)$

Définition 5 (Extremum local) Soit $f : A \to \mathbb{R}$ avec A partie de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in A$.
f admet un minimum (resp. maximum) local en a s'il existe un ouvert V contenant a tel que :
$f_{/A\cap V}$ admette un minimum (resp.maximum) en a

Exemple 9 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2 + y^2 - x^3 - x^2y^5$.
f admet-elle un extremum local en $(0,0)$? f admet-elle un extremum global en $(0,0)$?

II.2 Extremum pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert

Définition 6 (Point critique) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$.
On dit que a est un point critique de f lorsque $\quad \nabla f(a) = 0$.

Proposition 5 Condition nécessaire d'existence d'un extremum local pour une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert. (dem)
Si une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ admet un extremum local en un point a, alors a est un point critique de cette fonction.
Autrement dit : si U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}) \\ f \text{ a un extremum local en } a \in U \end{array} \right\} \Longrightarrow \nabla f(a) = 0.$$

Remarque 3 La réciproque est fausse.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 - y^2$
Vérifier que $(0,0)$ est un point critique de f, mais que f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$.

II.3 Extrema d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et Hessienne

Proposition 6 (Extremum et signe des valeurs propres de la hessienne. (dem))
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose que a est un point critique de f sur l'ouvert U.

- Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint en a un minimum local strict.
- Si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint en a un maximum local strict.
- Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'admet pas de minimum en a.
- Si $-H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'admet pas de maximum en a.

Attention, si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{+}(\mathbb{R})$ et si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors on ne peut pas conclure.

Proposition 7 (Autre formulation)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose que a est un point critique de f sur l'ouvert U.

- Si les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement positives, alors f admet en a un minimum local strict.
- Si les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement négatives, alors f admet en a un maximum local strict.
- Si $H_f(a)$ admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum en a (point selle ou "col")

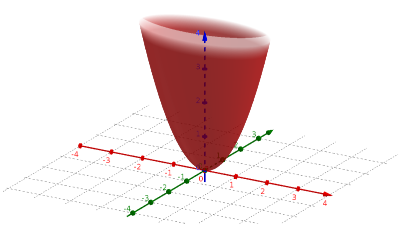
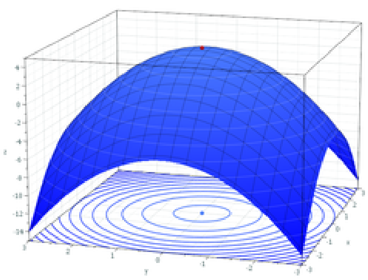
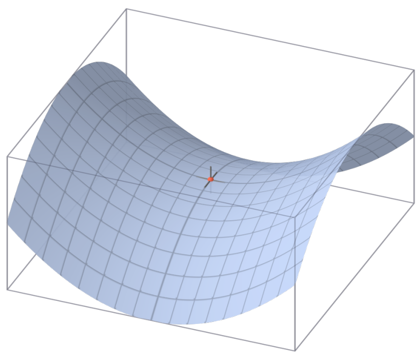
Dans les autres cas, la matrice Hessienne ne permet pas de conclure.

Remarque 4 Cas particulier d'une fonction de deux variables : la matrice hessienne est symétrique réelle de taille 2, son polynome caractéristique est :

$$\chi_A = X^2 - Tr(A)X + det(A) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2).$$

Donc : $\lambda_1 + \lambda_2 = Tr(A)$ et $\lambda_1 \times \lambda_2 = det(A)$.

Si $H_f(A)$ a ses deux valeurs propres non nulles et de même signe, alors f a un extremum local en A.
C'est un maximum lorsque les valeurs propres sont
C'est un minimum lorsque
Si les valeurs propres de $H_f(A)$ sont de signes contraires, f n'a pas d'extremum local.

Comment trouver la nature du point critique sans calculer les valeurs propres de $H(A)$?[1]

II.4 Plan de recherche d'extrema d'une fonction f

Proposition 8 (Cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert)

- Recherche des points critiques de f.
- Etude de f autour de chaque point critique, à l'aide de la Hessienne.

Exemple 10

1. Déterminer les extremums locaux et globaux de la fonction f définie par

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3.$$

2. Déterminer les extremums locaux et globaux de la fonction g définie par

$$g(x,y) = \sin^2(x) - \sinh^2(y).$$

3. Déterminer les extremums locaux et globaux de la fonction h définie par

$$h(x,y) = (x^2 + y^2 - 8)(x^2 + y^2).$$

Exemple 11 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y.$
f admet-elle un extremum local sur $\mathbb{R}^2$?

Exemple 12 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \dfrac{2x}{1 + x^2 + y^2}$

Exemple 13 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$

Proposition 9 (Cas général : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie A quelconque de $\mathbb{R}^p$)

- Etude sur l'intérieur de A qui est ouvert, avec la méthode précédente.
- Etude sur $A_{/int(A)}$ avec paramétrage éventuel.
- Conclusion

Proposition 10 (Rappel) Si f est une fonction continue sur une partie fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie, alors f admet un minimum et un maximum.

Exemple 14 Soit $a > 0$ et $b > 0$.
On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, les point $A = (a, 0)$ et $B = (0, b)$.
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble constitué du triangle OAB et des points à l'intérieur de ce triangle. Pour $M = (x, y) \in \mathcal{D}$, on pose $f(M) = d(M, (Ox)) \times D(M, (Oy)) \times d(M, (AB))$.
Montrer que f est bornée sur $\mathcal{D}$ et trouver ses extrema.

Exemple 15 Soit $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 2x^2 + y^2 - 2y \leq 1\right\}$.

1. Représenter $\mathcal{D}$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D}$ par : $f(x,y) = x^2 e^y$.
   Montrer que f a un minimum et un maximum sur $\mathcal{D}$ et les déterminer.

Exemple 16 Extrait de CCINP récent : Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée. On se donne un entier $n \geq 2$. On rappelle que la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

On note $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.
On fixe des réels $a_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$ et on considère l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} x_i x_j \right) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les extremums de la fonction f sur la partie B_n. On définit la matrice $M_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme la matrice **symétrique** dont les coefficients $(m_{i,j})$ vérifient :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i = j \\ a_{i,j}/2 & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Si M est une matrice à coefficients réels, on note M^T sa matrice transposée.

Partie I - Etude d'un exemple Dans cette **partie,** on suppose que $n = 2$ et que l'application $f : B_2 \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in B_2, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$$

1. Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_2.
2. En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$, déterminer les extremums de l'application f sur la frontière $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de B_2.
3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer les points critiques de l'application f dans la boule unité ouverte $B_2' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de $\mathbb{R}^2$.
4. En déduire que le maximum de f sur B_2 est 3 et que le minimum de f sur B_2 est -1.
5. Vérifier que la plus grande valeur propre de M_f est égale au maximum de f sur B_2 et que la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2.

Partie II - Le cas général On ne suppose plus dans cette **partie** que $n = 2$.
On considère un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n$ et on note $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

6. Montrer que $f(x) = X^T M_f X$.
7. Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.
On fixe une matrice **orthogonale** $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_f = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note $Y = P^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

8. Montrer les égalités $Y^T Y = X^T X = \|x\|^2$.
9. On suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. Montrer que $\lambda_1 \leq Y^T D Y \leq \lambda_n$ et en déduire que $\lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n$.
10. En déduire que si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors $\max\limits_{B_n}(f) = \lambda_n$ et $\min\limits_{B_n}(f) = \lambda_1$.
11. Dans le cas où $\lambda_1 \geq 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n.

Partie III - Application des résultats Dans cette **partie,** on suppose que $n \geq 3$ et que l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in B_n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2 x_i x_j.$$

12. Déterminer le maximum et le minimum de l'application f sur B_n (on pourra commencer par déterminer le rang de la matrice $M_f - 2I_n$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

III Exemples d'équations aux dérivées partielles

III.1 Quelques exemples fondamentaux

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$
3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$
4. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k$ où k est un réel fixé.
5. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = xy.$

III.2 Utilisation de changement de variables

Exemple 17 Résolution de $\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ à l'aide des coordonnées polaires.

Exemple 18 Extrait d'épreuve de concours, niveau CCINP PC : On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles :

$$\left(2\,x - y^2\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 16\,\varphi = 0 \quad (E)$$

sur le domaine $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 < 2x\right\}$.

1. Représenter D. Justifier qu'il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On considère l'application h qui, à tout (u, v) de Δ, associe : $h\,(u, v) = \left(\dfrac{u^2 + v^2}{2}, v\right)$. Justifier, en explicitant sa réciproque, que h est une bijection de Δ sur D. Montrer que h et h^{-1} sont de classe C^1 sur leurs domaines de définition respectifs.
3. Montrer que la fonction φ, de classe C^2 sur D, est solution de (E) sur D si et seulement si la fonction ψ, définie, pour tout (u, v) de Δ, par $\psi\,(u, v) = (\varphi \circ h)\,(u, v)$, est solution sur Δ de $\left(E'\right)$:
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - 16\,\psi = 0$$
4. Déterminer toutes les solutions de $\left(E'\right)$ sur Δ.