I : Calcul différentiel

Exercice 1 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=2x^2+y^3$.
Soit $a=(2,1)$. On note $h=(h_1,h_2)$.
Expliciter la différentielle de f en a calculée en h.

Exercice 2 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour tout réel x, on pose $g(x)=f(x,x)$ et $h(x)=f(x^2,x)$.
Montrer que g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer leur dérivée.

Exercice 3 Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour $(x_1,...,x_n,h_1,...h_n)\in\mathbb{R}^{2n}$, on note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t)=f(x_1+th_1,....x_n+th_n)$.
Calculer $g'(t)$

Exercice 4 Soit $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que $\dfrac{\partial H}{\partial x}=\dfrac{\partial H}{\partial y}$.
Montrer que pour tout réel a, la fonction H est constante le long de la droite d'équation $x+y=a$.

Exercice 5

1. Soit U un ouvert et soit $a\in U$.
   On dit que U est étoilé par rapport à a lorsque :
   $$\forall b\in U,\ [a,b]=\{a+t(b-a),\ t\in[0,1]\}\subset U.$$
   Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U étoilé par rapport à a. On suppose que les dérivées partielles de f sont nulles.
   Montrer que f est constante.
2. Soit $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy\neq 1\}$. Dessiner U.
   Montrer que U est la réunion de deux ouverts convexes et d'un ouvert étoilé par rapport à $(0,0)$.
3. Soit f la fonction définie sur un ouvert U par :
   $$\forall(x,y)\in U,\quad f(x,y)=\arctan(x)+\arctan(y)-\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$
   Déterminer le gradient de f, puis simplifier l'expression de f

Exercice 6 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}$.
On dit que f est homogène de degré r lorsque :
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\forall t>0,f(tx,ty)=t^rf(x,y).$$
Cette relation est appelée relation d'Euler pour f.

1. Montrer que si f est homogène de degré r, alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r-1$.
2. Montrer que si f est homogène de degré r si et seulement si :
   $$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=rf(x,y).$$
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que :
   $$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=r(r-1)f(x,y).$$

Exercice 7 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$
Montrer que la quantité $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(r\cos(t);r\sin(t))dt$ ne dépend pas de r. La calculer

II : Extrema

Exercice 8 On note $\Omega=]0;1[\times]0;1[$ et on définit une fonction f sur Ω par :
$$\forall(x,y)\in\Omega,\ f(x,y)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}.$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur l'ouvert Ω. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. Déterminer les points critiques de f

3. Montrer que f admet un extremum local sur Ω

Exercice 9 Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

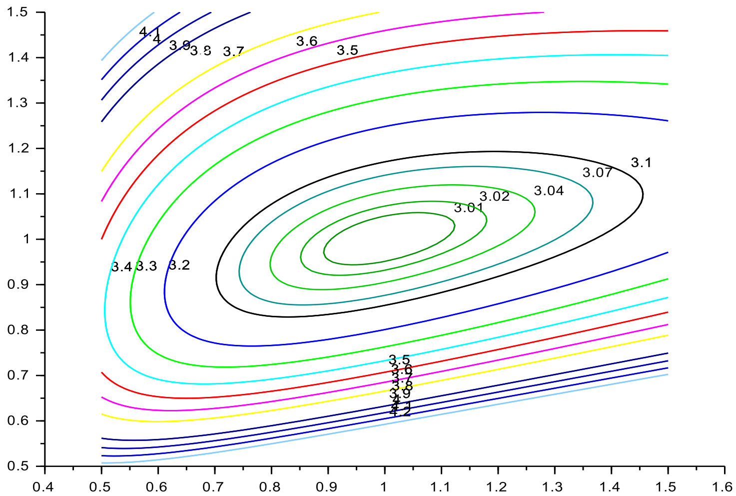
1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + xy + y^3$
2. $\forall (x,y) \in]0;1[\times]0;1[,\ g(x,y) = 4xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$
3. $\forall (x,y) \in]0;1[\times]0;1[,\ h(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x+y}$
4. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^3 + y^2 - xy + z^2$

Exercice 10 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 - 2y^2 - 5xy$.
On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \text{ et } \quad x+y \leqslant 1\}$ et $D_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ y > 0, \text{ et } \quad x+y < 1\}$

1. Représenter D.
2. Montrer que D est un fermé borné et que D_0 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f admet un minimum global m et un maximum global M sur D.
4. Montrer que f n'admet pas d'extremum local sur D_0.
5. Déterminer m et M, ainsi que les points où ils sont atteints.

Exercice 11 On considère la fonction f définie sur l'ouvert de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+}*$ par : $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2} + y^2 + \dfrac{1}{x}$

1. Le tracé des lignes de niveau de la fonction f donne :



Etablir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f, dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.

2. Vérifier votre conjecture par le calcul.

Exercice 12
Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considere la fonction de n variables réelles, notée f, définie par :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer le seul point critique $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de f sur $\mathbb{R}^n$.
3. Vérifier que la hessienne de f en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.
4. Donner les valeurs propres de J_n, puis celles de A_n.
5. En déduire que f admet un minimum local en $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et vérifier que ce minimum est égal à $-\dfrac{n}{4(n+1)}$

III : Equations aux dérivées partielles

Exercice 13 Déterminer toutes les fonctions réelles de classe C^1 sur $]0,+\infty[.\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6f(x,y)$$

Indication : utilisez les coordonnées polaires

Exercice 14 Déterminer toutes les fonctions réelles de classe C^2 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{y}{x^3}$$

Indication : changement de variables $x = u + v$ et $y = u - v$

Exercice 15

1. Soit h une fonction réelle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $h(0,0) = 0$ et :
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 0$

   Montrer que $h = 0$ (on pourra exploiter $t \mapsto h(tx,ty)$.)
2. On pose $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$.
   Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.
   f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer toutes les fonctions réelles g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$g(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$$

IV : Exercices issus de la banque CCINP

Exercice 16 (Analyse, ex33)

On pose : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f\,(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice 17 (Analyse ex 52)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Prouver que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?