Programme de colle. Semaine n°22 : du 08/04 au 12/04/2024.

Déroulement : La colle comporte cette semaine pour tout le monde **plusieurs** questions de cours, suivies de un ou deux exercices.
Les définitions et énoncés de théorèmes/propriétés doivent être connus...

I : Révisions de PCSI sur les fonctions de deux variables

Tout le programme de PCSI sur les fonctions de deux variables est censé être connu.

II : Fonctions de plusieurs variables

Les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ont été introduites en première année. L'objectif de cette section est d'approfondir et de généraliser cette étude aux fonctions de $p \geqslant 2$ variables.
L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, cette section se consacre à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Elle est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie. On se limite en pratique au cas $p = 2$ ou $p = 3$.

a) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ Dérivée en un point selon un vecteur. Notation $D_v f(a)$.
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\partial_i f(a)$.
Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur Ω.
Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω admet en tout point a de Ω un développement limité d'ordre 1(Formule de Taylor-Young à l'ordre 1, admise).
Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est continue sur Ω. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
Différentielle de f en a. Elle est définie comme la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$: $\mathrm{d}f(a) : (h_1,\ldots,h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i$. **Notation** $\mathrm{d}f(a)\cdot h$.

b) Règle de la chaîne Dérivée de $t \mapsto f\big(x_1(t),\ldots,x_p(t)\big)$.
Application au calcul des dérivées partielles de : $(u_1,\ldots,u_n) \mapsto f\big(x_1(u_1,\ldots,u_n),\ldots,x_p(u_1,\ldots,u_n)\big)$.
En pratique, on se limite à $n \leqslant 3$ et $p \leqslant 3$.
Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.
Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.

c) Gradient Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Le gradient est défini par ses coordonnées. Notation $\nabla f(a)$.
Pour $h \in \mathbb{R}^p$, relation $\mathrm{d}f(a)\cdot h = \langle \nabla f(a), h\rangle$.
Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale, et de même sens.

d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
Théorème de Schwarz (admis).
Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notation $H_f(a)$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admise) : si $h = (h_1,\cdots,h_p)$ et $X = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$ alors

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2} X^T H_f(a) X + \mathrm{o}(\|h\|^2)$$

III : Questions de cours

- Dérivées partielles d'ordre 1, fonctions de classe C^1. Definitions
- Théorème fondamental (existence du dl (ordre 1) pour une fonction de classe C^1. énoncé
- Le caractère C^1 entraine la continuité (dem)
- Différentielle en un point : définition et propriétés (énoncé)
- Règle de la chaine (énoncé)
- Calcul du gradient en coordonnées polaires (dém)
- Caractérisation des fonctions constantes sur un convexe (dem)
- Gradient définition et propriétés (enoncé)
- Dérivées partielles d'ordre 2, caractère C^2.
- Théorème de Schwarz (énoncé)
- Formule de Taylor Young (ordre 2) énoncé