Ianis

Exercice 1 On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$, à valeurs dns $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{|f(t)|}$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

1. Les normes $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\ \|_\infty$.
   (a) Soit $u \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array} \right.$
   Prouver que u est une application continue sur E.
   (b) On pose $F = \{f \in E \,/\, f(0) = 0\}$.
   Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\ \|_\infty$.
3. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\ \|_1$.
   Soit $c \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \right.$
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \dfrac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - x\|_1$.
   (b) On pose $F = \{f \in E \,/\, f(0) = 0\}$.
   On note $\overline{F}$ l'adhérence de F.
   Prouver que $c \in \overline{F}$.
   F est-(elle une partie fermée de E pour la norme $\|\ \|_1$?

Coline

Exercice 2 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Mathys

Exercice 3 Soit X un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

Isaline

Exercice 4

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Y_n admet un moment d'ordre 2.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall\, a \in\ ]0, +\infty[,\ P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Simon

Exercice 5 On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}(A^T A')$, où $\operatorname{tr}(A^T A')$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.