Exercice 1 Soit $F: x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est positive et décroissante.
3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) - F'(x) = \dfrac{1}{x}$. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
5. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. En déduire la limite de F en 0^+.
6. Montrer que $F(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 2 On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \left]-1, 1\right[$, $\displaystyle\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in \left]0, 1\right[$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall\, (k, n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \displaystyle\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

Exercice 3 Erwan

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall\, B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Longrightarrow A^2 B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.