Esteban **Exercice 1** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que (a_n) est décroissante. Calculer a_0 et a_1.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$. En déduire que $a_n \sim a_{n+1}$.
3. Montrer que la suite de terme général $(n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$ est constante.
   En déduire un équivalent de a_n.
   Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?

Justine **Exercice 2** On donne : $\forall p \leqslant n$, $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément deux boules au hasard. On note X (resp. Y) la variable aléatoire correspondant au numéro le plus petit (resp. le plus grand) des deux boules.

1. Déterminer la loi de (X, Y). En déduire les lois de X et de Y.
2. Calculer $E(Y)$, $E(Y(Y-2))$ et $V(Y)$.
3. Montrer que $n+1-X$ suit la même loi que Y. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
4. Calculer $E(X(Y-2))$ et $Cov(X, Y)$.

Maeline **Exercice 3** Soient n un entier naturel non nul, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $P_n = (X-a)^n(X-b)^n$ et $Q_n = \frac{P_n^{(n)}}{n!}$.

1. Déterminer le degré de Q_n ainsi que son coefficient dominant.
2. Montrer que $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $P_n^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(b) = 0$. Montrer que $Q_n(a) \neq 0$ et que $Q_n(b) \neq 0$.
3. Montrer qu'il existe $(\lambda_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ tel que $Q_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}(X-a)^{n-k}(X-b)^k$.
4. Calculer $I_n = \int_a^b P_n(t)\mathrm{d}t$ et $J_n = \int_a^b Q_n(t)\mathrm{d}t$.

Lucie **Exercice 4** Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ et $Y = X^2 + 1$.

1. Déterminer l'espérance de Y.
2. Quelle est la probabilité que $2X < Y$?
3. Comparer les probabilités que X soit paire et que X soit impaire.

Mathys **Exercice 5**
Soit $f\colon z \mapsto \frac{z+1}{z-i}$. Trouver l'ensemble des z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$, puis tels que $|f(z)| = 2$.

Isaline **Exercice 6** Soit E l'espace des $(u_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (4n+2)u_n + u_{n-1}$. Soient (a_n) l'élément de E tel que $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$, et (b_n) l'élément tel que $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \geqslant 1$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \geqslant n$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1} = (-1)^{n+1}$.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{a_n}{b_n}$. Montrer la suite (x_n) converge, et que sa limite est strictement positive.

Coline **Exercice 7** Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E. Montrer que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

Ianis **Exercice 8** On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.

1. Justifier que X_n est bien une variable aléatoire discrète et donner sa loi.
2. Justifier l'existence de l'espérance de X_n et la calculer.
3. On note Y_n le rang du premier tirage à l'issue duquel toutes les boules ont été tirées au moins une fois.
   Donner la loi de Y_2 puis celle de Y_3.

Simon **Exercice 9** Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n\colon x \mapsto x + \frac{n}{2}\ln x - n$.
Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $a_n \in [1, e^2]$.
Étudier la limite de (a_n).