Rq : pour tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Par ailleurs, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I Questions de Révision pour se mettre en route

I.1 Espaces Vectoriels

1. Dans cette question, on suppose que E est de dimensions finie $n \neq 0$.

   Qu'est-ce que cela veut dire ?

   (b) Famille génératrice de E : définition ? Combien a-t-elle d'éléments ?

   (c) Famille libre de E : définition ? Combien a-t-elle d'éléments ?

   Application : On définit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. Cette famille est-elle libre ?

   (d) Donner la définition d'une base de E et toutes les caractérisations possibles.

   Application : On définit $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

   Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de $t = (1, -2, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

2. Quelle est la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$?
3. Définition et caracterisation d'un ss-ev de E.
   Application : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tel que } x - iy = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. En donner une base.
   Déterminer une base de F en tant que $\mathbb{R}$-ev.
4. Dans E, supposé de dimension n :
   (a) que peut-on dire d'une famille de $n + 1$ vecteurs ?
   (b) que peut-on dire d'une famille de p vecteurs avec $p < n$?
5. Quelle est la définition d'une application linéaire de E dans F ?
6. (a) Qu'est-ce qu'un isomorphisme ? Existe-t-il des isomorphismes de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$?
   (b) Qu'est-ce qu'un endomorphisme ? Exemple ?
   (c) Qu'est-ce qu'un automorphisme ? Exemple ?
   (d) Qu'est-ce qu'une forme linéaire ?
   Application : $f : (x, y, z) \longmapsto x + y + z$ est-elle une forme linéaire sur $\mathbb{K}^3$?
   Même question avec $g : (x, y, z) \longmapsto\longmapsto xyz$.
7. (a) Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, quel est son noyau ?, son image ?
   (b) Rapport avec l'injectivité ? la surjectivité ? la bijectivité ?
8. Si f application linéaire, transforme une base en une base, alors elle est bijective.
   (a) Vrai ? (b) Faux ? (c) Ça dépend ....
9. Même question avec "famille libre" au lieu de "base", avec "famille génératrice" ?
10. (a) La somme de 2 endomorphismes bijectifs est-elle bijective ? Si oui, demonstration. Si non, contre-exemple.
    (b) La composée de 2 endomorphismes bijectifs est-elle bijective ? Si oui, preuve. Si non, contre-exemple.
11. Pour chacune des applications suivantes, montrer qu'elle est linéaire, déterminer son noyau, déterminer son image, dire si elle est injective, surjective, bijective...
    (a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y, z) = (2x - y - z\ ,\ -x + 2y + z)$
    (b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $g(x, y) = (4x + y\ ,\ x - y\ ,\ 2x + 3y)$
    (c) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $h(x, y, z) = (-x + y - z\ ,\ x - y + z\ ,\ 2x - 2y + 2z)$
    Vous écrirez aussi les matrices de ces applications dans les bases canoniques concernées.
12. Soient f et g des endomorphismes de E.
    (a) Y a-t-il un lien entre $\ker(g \circ f)$ et $\ker\ (g)$? Entre $\ker(g \circ f)$ et $\ker(f)$?
    (b) Y a-t-il un lien entre $\mathrm{Im}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}\ (g)$? Entre $\mathrm{Im}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(f)$?
    (c) Que peut-on dire dire $g \circ f = 0$?
13. Qu'est-ce qu'un hyperplan ? Que peut-on en dire en dimension finie ?
14. Si H est un hyperplan de E (de dimension finie) et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \bigoplus D$. Vrai ou faux ?

I.2 Applications linéaires, calcul matriciel

1. Pour n et p entiers naturels non nuls, énoncer les propriétés qui font que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. En connaissez-vous une base ? quelle est sa dimension ?
3. Qu'est-ce qu'une matrice carrée ? triangulaire supérieure ? triangulaire inférieure ? diagonale ?
4. Quelle est la dimension de l'espace des matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
5. Définition de la transposée d'une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$?
6. Qu'est-ce qu'une matrice symétrique ? une matrice anti-symétrique ? exemples ?
   Quelle est la dimension de l'espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
7. On peut toujours multiplier 2 matrices A et B entre elles : Vrai ? Faux ? Ça dépend ?
8. Ecriture matricielle du système : $(S) : \left\{\begin{array}{l} x - 2y - 3z + t = 6 \\ \sqrt{5}y + 3t = 0 \\ x + y + z + t = -3 \end{array}\right.$
9. Méthode du pivot de Gauss ? Résoudre le système (S) précédent.
10. Si $A = (a_{i,j})\,, B = (b_{i,j})$ et $A \times B = (c_{i,j})$ quelle est l'expression de $c_{i,j}$?
    <u>Application</u> : en notant $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ tel que $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$, montrer que I_n est l'élément neutre pour la multiplication de matrices.
11. La formule du binôme et les identités remarquables sont-elles encore valables ?
    $(A + B)^n = ...$? $\qquad A^n - B^n = ...$?
    <u>Application</u> : pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
12. Si D est une matrice diagonale que vaut D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$?
13. Définition du rang d'une matrice. Définition du noyau d'une matrice (Ker (A)). Y a-t-il une relation reliant ces 2 notions ?
    <u>Application</u> : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 5}}$ tel que $a_{2,1} = 1$ et sinon $a_{i,j} = 0$. Construire A. Quel est son rang ? Déterminer $\mathrm{Ker}(A)$.
14. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donner la définition de A inversible.
    Une matrice <u>non carrée</u> peut-elle être inversible ?
    Caractérisation<u>s</u> d'une matrice inversible (en pensant aux applications linéaires par exemple) ? Exemple de matrices inversibles ? de matrices non inversibles ?
15. L'inverse d'une matrice est unique : Vrai ? Faux ? Ça dépend ?
16. Que peut-on dire d'un système tel que la matrice de ses coefficients est inversible ?
    <u>Exemple</u> : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & - & 4z & = & -8 \\ 3x & + & 9y & - & 6z & = & 9 \\ 4x & + & 17y & - & 11z & = & 41 \end{array}\right.$
17. Si $A^2 = 0$ alors
    (a) $A = 0$?
    (b) A est non inversible ?
18. (a) Si $A \times B$ existe, que vaut sa transposée ?
    (b) Si A est inversible, est-ce le cas de sa transposée ? que vaut la transposée de A^{-1} ?

II Rappels sur espaces vectoriels

Définition 1 <u>$\mathbb{K}$-espace vectoriel</u>
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un espace $(E,+,\cdot)$ (non vide) muni d'une **loi interne** $+$ et d'une **loi externe** $\cdot$ vérifiant :

1. $\forall (u,v,w)\in E^3,\ u+(v+w)=(u+v)+w$
2. $\forall (u,v)\in E^2,\ u+v=v+u$
3. $\exists 0_E\in E\,/\,\forall u\in E,\ u+0_E=u$
4. $\forall u\in E,\ \exists!(-u)\in E\,/\,u+(-u)=0_E$
5. $\forall \alpha\in\mathbb{K},\ \forall (u,v)\in E^2,\ \alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v$
6. $\forall (\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall u\in E,\ (\alpha+\beta)\cdot u=\alpha\cdot u+\beta\cdot u$
7. $\forall (\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall u\in E,\ \alpha\cdot(\beta\cdot u)=(\alpha\beta)\cdot u$
8. $\forall u\in E,\ 1\cdot u=u$

Remarque 1 $\forall (\lambda,u)\in\mathbb{K}\times E,\ \lambda\cdot u=0_E \iff (\lambda=0 \text{ ou } u=0_E)$
<u>Exemples fondamentaux de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels</u> : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \mathbb{K}^{\Omega}, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathcal{F}(I,\mathbb{R}), \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}^p)$....
Si A est un ensemble non vide et V un $\mathbb{K}$-E.V. alors $E=\mathcal{F}(A,V)$ est un $\mathbb{K}$-E.V., lorsqu'on le munit des lois suivantes, : $\forall\alpha\in\mathbb{K},\ \forall (f,g)\in E^2$, $f+g\ :\ x\mapsto$ et αf en posant, pour tout $x\in A$: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ et $(\alpha\cdot f)(x)=\alpha\cdot(f(x))$.
Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 2 Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $F\subset E$.
On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F est non vide et stable par les lois $+$ et .

Proposition 1 Soit $F\subset E$. Aors F est un sous-espace vectoriel de E **si et seulement si** :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{i) } 0_E\in F\\ \text{ii) } \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall (u,v)\in F^2,\ u+\lambda\cdot v\in F\end{array}\right\} \text{ ou bien } \left\{\begin{array}{l}\text{i) } F\neq\emptyset\\ \text{ii) } \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall (u,v)\in F^2,\ u+v\in F \text{ et } \lambda\cdot v\in F\end{array}\right\}$$

Proposition 2 Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors la restriction des lois de E à F confèrent à $(F,+,\cdot)$ une structure d'espace vetoriel.

<u>Exemples fondamentaux de sous-espaces vectoriels</u> : l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un SEV des $\mathbb{K}^n$, l'ensemble des solutions d'une équations différentielle linéaire homogène est un SEV de

Définition 3 Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille (finie) de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E.
L'ensemble des <u>combinaisons linéaires</u> de la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est noté $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$.

$$\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)=\{\lambda_1\,x_1+\dots+\lambda_n x_n\,/\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\}$$

Proposition 3 $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ est un **sous-espace vectoriel** de E.
On dit que $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ est le <u>sous-espace engendré</u> par la famille $(x_1,\dots,x_n)$.
Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.

Remarque 2 Si $u_n\in\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_{n-1})$ alors $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_{n-1})$.

Proposition 4 L'**intersection** de sous-espaces vectoriels $F_1,\dots,F_n$ de E est un sous-espace vectoriel de E.

Par exemple si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F\cap G$ aussi.

Proposition 5 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On définit alors la **somme** de F et G par :

$$F+G=\{u+v\,/\,(u,v)\in F\times G\}$$

La somme $F+G$ est un **sous-espace vectoriel** de E.

Remarque 3 En pratique : $x\in F+G \iff \exists (u,v)\in F\times G\,/\,x=u+v$.

Définition 4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F,G deux sous-espaces vectoriels de E.
La somme $F+G$ est **directe** et notée $F\oplus G$ lorsque tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de $F+G$ s'écrit <u>de manière unique</u> sous la forme $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ où $u\in F$ et $v\in G$.
De manière équivalente, $F+G=F\oplus G$ lorsque $\left\{\begin{array}{l}u+v=\overrightarrow{0_E}\\ u\in F\quad v\in G\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{u=v=\overrightarrow{0_E}\right\}$.

Proposition 6 Caractérisation d'une somme directe. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$(F + G = F \oplus G) \Longleftrightarrow F \cap G = \{\overrightarrow{0_E}\}.$$

Définition 5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
F et G sont dits **supplémentaires dans** E lorsque $F \oplus G = E$ (la somme $F + G$ est directe et $F + G = E$), ce qui s'écrit :

$$\forall x \in E,\ \exists!(u, v) \in F \times G \,/\, x = u + v.$$

Définition 6 Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs. On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si pour tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, on a :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Une famille qui n'est **pas libre** est dite liée.

Remarque 4

Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre on dit aussi que $x_1, \dots, x_n$ sont **linéairement indépendants**.

Si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur non nul, la famille $(\overrightarrow{x})$ est libre.

La famille (x, y) est liée SSI : $x = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, tel que $y = \lambda x$. Les vecteurs x et y sont alors dits « colinéaires ».

Toute famille contenant le vecteur nul 0_E est liée.

Toute "sous-famille" d'une famille libre est libre.

Toute "sur-famille" d'une famille liée est liée.

Proposition 7 Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs. Alors :
$(x_1, \dots, x_n)$ est **liée si et seulement si un** (au moins) des vecteurs est **combinaison linéaire** des autres.

Proposition 8 Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une **famille libre** et x_{n+1} un vecteur. Alors :

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \text{ est libre} \Longleftrightarrow x_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

Proposition 9 Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts :

Une famille finie de polynômes **non nuls** et de **degrés échelonnés** est libre.

Définition 7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire si tout $x \in E$ est combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque 5 Toute "sur-famille" d'une famille génératrice est génératrice.

Définition 8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si $(e_1, \dots, e_n)$ est **libre et génératrice** dans E.

Theorème-Definition 1 Supposons que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ soit une base de E. Alors tout vecteur x de E se décompose de façon unique dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall x \in E,\ \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \,/\, x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples importants : bases **canoniques** des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 10 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces en **somme directe**.
Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases respectives de F et de G. Alors la famille $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une **base** de $F \oplus G$. On dit que cette base est adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
En particulier si F et G sont **supplémentaires** dans E alors $\mathcal{B}$ est une base de E.

Proposition 11 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ une famille **libre** de E.
Posons $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et $G = \text{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$. Alors F et G sont en **somme directe**.

Remarque 6 En particulier, en reprenant les mêmes notations : si $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ est une **base** de E alors F et G sont **supplémentaires** dans E.

Définition 9 Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit de dimension finie lorsqu'il admet une **famille génératrice finie**.

Théorème 1 **Théorème de la base extraite** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et de dimension finie. Alors de toute famille génératrice (finie) de E, on peut extraire une base.

Par conséquent tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit $\{0\}$ et de dimension finie admet une base.

Proposition 12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par une famille de n vecteurs.
Alors toute famille de $n+1$ vecteurs de E est **liée**.

Proposition 13 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors :

1. Toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé dimension de E.
2. Toutes les familles libres de E ont un cardinal **inférieur ou égal** à $\dim(E)$.
3. Toutes les familles génératrices de E ont un cardinal **supérieur ou égal** à $\dim(E)$.

Remarque 7 Dimension de K^n ?
Dimension de $\mathbb{K}_n[X]$?
Dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$? De $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimensions finies ?
Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 ?
Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants ?
Dimension de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants ?

Théorème 2 **Théorème de caractérisation des bases** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Les propositions suivantes sont **équivalentes** :

1. $\mathcal{F}$ est une base
2. $\mathcal{F}$ est libre et $\text{card}(\mathcal{F}) = n$
3. $\mathcal{F}$ est génératrice et $\text{card}(\mathcal{F}) = n$

Remarque 8 Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $K_n[X]$: si $P_0, \cdots, P_n$ sont des polynômes non nuls et de degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$,c'est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.
C'est de plus une famille de $n+1$ polynômes dans un espace de dimension $n+1$, donc c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Théorème 3 **Théorème de la base incomplète** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors toute famille libre de E peut être complétée en une base.
Autrement dit : si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une famille libre de E (avec $k \leqslant n$) alors il existe $n-k$ vecteurs $e_{k+1}, \ldots, e_n$ tels que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Remarque 9 Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.

Définition 10 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. On définit le rang de la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ par :

$$\text{rg}(x_1, \ldots, x_p) = \dim(\text{Vect}(x_1, \ldots, x_p))$$

Proposition 14 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$$(x_1, \ldots, x_p) \text{ est libre } \iff \text{rg}(x_1, \ldots, x_p) = p$$

Proposition 15 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1. F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
2. $F = E \iff \dim(F) = \dim(E)$

Proposition 16 **Existence de supplémentaires**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe au moins un sous-espace vectoriel G de E tel que : $E = F \oplus G$.

Remarque 10 En règle générale, si $F \neq E$ et $F \neq \{0_E\}$, alors F a une infinité de supplémentaires.

Proposition 17 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E.

$$F \oplus G = E \iff \left\{ \begin{array}{l} F \cap G = \{0\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} F + G = E \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{array} \right.$$

En particulier : **Si** F, G sont **supplémentaires** dans E. Alors :

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

Proposition 18 **Formule de Grassman**
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

III Applications linéaires

Définition 11 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On appelle application linéaire de E dans F toute application $f : E \to F$ telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u, v) \in E^2,\ f(u + \lambda \cdot v) = f(u) + \lambda \cdot f(v).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
Alors $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 12 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

1. Si $E = F$ alors on dit que f est un endomorphisme de E.
   on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
2. Si f est une bijection de E dans F, on dit que f est un isomorphisme de E dans F.
3. Si $E = F$ **et si** f est une bijection de E dans E, on dit que f est un automorphisme de E.
   On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
4. Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme linéaire sur E.

Proposition 19 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors pour toute famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E et tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

On a de plus $f(O_E) = O_F$.

Proposition 20 Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$. Généralisation à une composée de plusieurs applications linéaires.
En particulier une composée d'endomorphismes de E est un endomorphisme de E.

Proposition 21 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit G un **sous-espace vectoriel** de E et soit H un sous-espace de F.
Alors $f(G) = \{f(x),\ x \in G\}$, **image directe** de G par f, est un sous-espace vectoriel de F.
Et $f^{-1}(H) = \{x \in E / f(x) \in H\}$, image réciproque de H par f, est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 13 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. On définit le noyau de f par :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \,/\, f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

2. On définit l'image de f par :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x)\,,\ x \in E\} = f(E).$$

Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un **sous-espace vectoriel** de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un **sous-espace vectoriel** de F.

Remarque 11 En pratique : $x \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x) = 0$ et $y \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists x \in E \,/\, y = f(x)$.

Proposition 22 Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$. De plus, dans ce cas, on a :

- $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
- $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$
- $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda f) \circ g = \lambda (f \circ g) = f \circ (\lambda g)$

La loi $\circ$ est associative, distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition, possède un élément neutre Id_E.

Notation $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, et $f^0 = I_E$..

Proposition 23 Si $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$, et **si f et g commutent** (c'est à dire $g \circ f = f \circ g$) alors :

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} \text{ (formule du binôme)}$$

$$\text{et l'identité remarquable : } f^n - g^n = (f-g) \circ (\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k})$$

En particulier, on peut appliquer la formule du binôme pour calculer $(f + Id_E)^n$ ou bien $(f + \lambda Id_E)^n$ (où $\lambda \in \mathbb{K}$) et on a $f^n - Id_E = (f - Id_E) \circ (Id_E + f + \cdots + f^{n-1})$

Proposition 24 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. f est **injective** si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
2. f est **surjective** si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Proposition 25 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f un **isomorphisme** de E dans F. Alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E. On dit alors que E et F sont isomorphes.

Remarque 12 En particulier si f est un automorphisme de E, alors f^{-1} est un automorphisme de E. L'ensemble $\mathcal{GL}(E)$ des automorphismes de E est un **groupe** pour la loi $\circ$: le groupe linéaire de E.

Proposition 26 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **dimension finie** et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors :

f est un isomorphisme de E dans F **si et seulement si** $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

Remarque 13 Sous les mêmes hypothèses, on a plus généralement :

1. f est injective $\iff (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre
2. f est surjective $\iff (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice

Proposition 27 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ famille génératrice de E.

$$\text{Alors : } \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(x_1), \ldots, u(x_n)).$$

Remarque 14 Propriété très utile en pratique pour déterminer l'image d'une application linéaire en prenant une base de E.

Théorème 4 Caractérisation des isomorphismes
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **dimension finie** et tels que $\dim(E) = \dim(F)$.
On considère $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors les trois propositions suivantes sont **équivalentes** :

1. f est un **isomorphisme** de E dans F
2. f est injective
3. f est surjective

Remarque 15 Important : cas particulier des **endomorphismes** sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie**.

Proposition 28 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **dimension finie**. Alors :

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes} \iff \dim(E) = \dim(F)$$

Théorème 5 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E **de dimension finie**. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une **base** de E et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de F.

Alors il **existe une et une seule** application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : $\begin{cases} f(e_1) = u_1 \\ \quad\vdots \\ f(e_n) = u_n \end{cases}$

Théorème 6 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et G, H deux sous-espaces vectoriels de E **supplémentaires** dans E. Alors une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par ses **restrictions** à G et à H.
Cela signifie si on considère $g \in \mathcal{L}(G, F)$ et $h \in \mathcal{L}(H, F)$ alors il existe <u>une et une seule</u> application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, H)$ telle que : $\begin{cases} f_{/G} = g \\ f_{/H} = h \end{cases}$

Des endomorphismes remarquables : Projecteurs et symétries.

Définition 14 Projecteurs associés à deux sous-espaces supplémentaires dans E.
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Alors on sait que

$$\forall \overrightarrow{x} \in E,\ \ \exists!(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \in E_1 \times E_2 \text{ tel que } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}.$$

On appelle : projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 l'application $p : E \to E$, $x \mapsto x_1$ On dit aussi que p_1 est le projecteur de base E_1 et de direction E_2.
De même, on appelle projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 l'application $q : E \to E$, $x \mapsto x_2$.
p et q sont les projecteurs associés à E_1 et E_2.

Cas particuliers : si $E_1 = E$ alors $p =$ et si $E_1 = \{0_E\}$, alors $p =$

Proposition 29 Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Soient p et q les projecteurs associés à E_1 et E_2. Alors

- Pour tout $x \in E$, $\overrightarrow{x} = p(\overrightarrow{x}) + q(\overrightarrow{x})$ c'est à dire $p + q = \mathrm{Id}_E$.
- Pour tout $x \in E$, $x = \underbrace{p(x)}_{\in E_1} + \underbrace{x - p(x)}_{\in E_2}$
- $p \circ q =$ et $q \circ p =$

Proposition 30 Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Soit p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2. Alors :

- p est un endomorphisme de E.
- $\mathrm{Ker}(p) =$ et $\mathrm{Im}(p) =$
- $x \in E_2 \iff p(x) = x$ c'est à dire : $E_2 = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$.
- Pour tout $x \in E$, $p(p(x)) =$ c'est à dire : $p \circ p =$

Remarque 16 Si p est un projecteur de E, alors $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$.
Supposons que E **soit de dimension finie** et que p n'est pas un projecteur « dégénéré ».
Prenons $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$ et $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$ (en supposant que ce n'est pas un projecteur « dégénéré »).
Alors $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de p est est :

Théorème 7 **Caractérisation des projecteurs.**
Soit p un endomorphisme de E. Alors p est un projecteur de E si et seulement si $p \circ p = p$.
Dans ce cas, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Définition 15 **Symétries associées à deux sous-espaces supplémentaires dans E.**
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.
Soit p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et soit q le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.
Alors on appelle symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application $s = p - q$.
On dit (parfois) aussi que s_1 est la symétrie de base E_1 et de direction E_2.
Autrement dit, si $\overrightarrow{x} = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2}$ alors $s(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}$.

Remarque 17

- Comme $p + q = \mathrm{Id}_E$, on a aussi $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.
- On peut donc aussi écrire : $p = \dfrac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Proposition 31 Une symétrie vectorielle est un endomorphisme de E.

Remarque 18 On a donc $E = \mathrm{Ker}(s - Id) \oplus \mathrm{Ker}(s + Id)$. Supposons que E est de dimension finie. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de la symétrie s est :

Remarque 19 De manière générale, une application f telle que $f \circ f = Id$ est dite **involutive**. Elle est alors bijective et $f^{-1} = f$.

Proposition 32 Soit s une symétrie (vectorielle) de E.
Alors $s \in \mathcal{GL}(E)$, c'est-à-dire que s est un automorphisme de E. De plus : $s^{-1} = s$.

Théorème 8 **Caractérisation des symétries (vectorielles).**
Soit s un endomorphisme de E. Alors s est une symétrie de E si et seulement si $s \circ s = Id$.
Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + Id)$.

Rang d'une application linéaire

Définition 16 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est de rang fini si $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie. On définit alors le **rang** de u par :

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)).$$

Remarque 20 Si E est de dimension finie, et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors :

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))).$$

Proposition 33 Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ de rangs finis. Alors :

1. $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.
2. Si v est un **isomorphisme** de F dans G alors $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$.
3. Si u est un **isomorphisme** de E dans F alors $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$.

Pour résumer les affirmations $ii)$ et $iii)$, on parle d'« **invariance du rang par composition avec un isomorphisme** ».

Théorème 9 **Théorème du rang**
Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\ker(u)$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$.
Formule du rang : si E est de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$.

Proposition 34 Si $\dim(E) = \dim(F)$. Alors :

$$u \text{ est un isomorphisme de } E \text{ dans } F \iff \mathrm{rg}(u) = \dim(E) \iff \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}.$$

(Notamment pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie)

Proposition 35 Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible. Autrement dit :

Définition 17 Une équation linéaire est une équation d'inconnue x et de la forme

$$f(x) = b \text{ où } \begin{cases} E \text{ et } F \text{ sont deux } \mathbb{K}\text{-ev} \\ f \in \mathcal{L}(E, F) \\ b \in F \end{cases}$$

Proposition 36 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.
On considère l'**équation linéaire** $f(x) = b \ \ (E)$. Alors :

1. (E) admet au moins une solution si et seulement si $b \in \mathrm{Im}(f)$.
2. Dans ce cas, en notant x_0 une solution quelconque de (E), l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = x_0 + \mathrm{Ker}(f) = \{x_0 + x \,/\, x \in \mathrm{Ker}(f)\}.$$

Remarque 21 La solution x_0 est dite *particulière*.
Exemples : systèmes linéaires et équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2. Suites arithmético-géométriques.

Applications linéaires en dimensions finies et matrices

Définition 18 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $u(e_j)$ se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i.$$

On définit alors la matrice de l'application linéaire u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ par :

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]\times[\![\,1\,;\,p\,]\!]}\,.$$

Proposition 37 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Alors l'application $\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u &\longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \end{aligned}$
est un **isomorphisme** de $\mathbb{K}$- espaces vectoriels.
En particulier $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n\,p$.

Remarque 22 Cas particulier et très important des **endomorphismes** avec $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.
De même dans ce qui suit.

Proposition 38 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$.
On note $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ et $X = \mathcal{M}_B(x)$.
En notant alors $y = u(x)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(y)$, on a : $Y = AX$. Autrement dit :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u(x)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x).$$

Proposition 39 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Soient $(u, v) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda\, u + \mu\, v) = \lambda\, \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) + \mu\, \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v).$$

Remarque 23 Généralisation à une combinaison linéaire d'applications linéaires.

Théorème 10 Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p, n, q non nulles.
Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de G.
Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors : $\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u).}$

Remarque 24 Par conséquent on a « le même type de »règles de calcul pour les matrices que pour les applications linéaires, notamment la formule du binôme pour des matrices **qui commutent**.

Si A et B sont deux matrices, $AB = 0$ n'implique PAS que $(A = 0$ ou $B = 0)$! ! !

Proposition 40 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **même dimension finie** non nulle.
Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$.
Alors u est un **isomorphisme** de E dans F si et seulement si A est **inversible**.
De plus, dans ce cas : $A^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(u)$

Remarque 25 Dans le cas particulier où $E = F$ de dimension n et où $u \in \mathcal{L}(E)$, on a donc :

$$u \in \mathcal{GL}(E) \iff A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Définition 19 **Matrice de passage**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ deux bases de E.
Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, f_j se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i.$$

On définit alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ par :

$$P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E) = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Proposition 41 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ deux bases de E et P la **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors P est inversible et $P^{-1} = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Remarque 26 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de E.
Alors $\mathcal{F}$ est une **base** de E si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est **inversible**.

Théorème 11 **Changement de base pour un vecteur**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle et soit $x \in E$.
On considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et note P la **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Soit $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$. On a alors : $\boxed{X = PX'}$

Théorème 12 **Changement de base pour un endomorphisme**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et note P la **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Soit $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ et $M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$. On a alors : $\boxed{M' = P^{-1}MP}$

Proposition 42 Changement de base pour une application linéaire
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n non nulles.
Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_1'$ deux bases de E, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_2'$ deux bases F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Posons $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u), B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1',\mathcal{B}_2'}(u), P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1')$ et $Q = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_2')$. Alors : $\boxed{B = Q^{-1}AP}$

Définition 20 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On définit f l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A comme l'unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A$ avec $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$.

Définition 21 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On définit le noyau de A par :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \,/\, AX = 0\}$$

On définit l'image de A par :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$$

où $C_1, \ldots, C_p$ désignent les **vecteurs colonnes** de A.

$\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Ainsi, en identifiant $\mathbb{K}^p$ avec $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et en notant f l'application linéaire canoniquement associée à A, on a :

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(f)$$
$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(f)$$

Définition 22 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit le rang de A par :

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)) = \dim(\mathrm{Im}(A))$$

où $C_1, \ldots, C_p$ désigent les **vecteurs colonnes** de A.
Ainsi le rang de A est égal au rang de son application linéaire canoniquement associée.

Définition 23 Théorème du rang
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = \dim(\mathbb{K}^p) = p$.

Proposition 43 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Alors les propositions suivantes sont **équivalentes** :

1. A est inversible
2. Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$
3. Il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $CA = I_n$
4. $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$
5. $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$
6. $\mathrm{rg}(A) = n$
7. La famille $(C_1, \ldots, C_n)$ des vecteurs colonnes de A est une base de $\mathbb{K}^n$
8. La famille $(L_1, \ldots, L_n)$ des vecteurs lignes de A est une base de $\mathbb{K}^n$
9. $\det(A) \neq 0$

Remarque 27 Si la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ des vecteurs colonnes de A est libre, alors c'est une base de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 44 Invariance du rang par multiplication par une matrice inversible.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **inversible**.

1. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$.
2. Soit $C \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(CA) = \mathrm{rg}(C)$.

Proposition 45 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note A^T sa transposée. Alors :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$$

Par conséquent $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(L_1, \ldots, L_n))$ où $L_1, \ldots, L_n$ désigent les **vecteurs lignes** de A.

Remarque 28
1. Le rang d'un **système** est égal au rang de sa matrice.
2. Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau).
3. Deux matrices **équivalentes** par lignes ou par colonnes ont le même rang.

Définition 24 On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables lorsque :

$$\text{il existe } P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } B = P^{-1}AP.$$