1 Systèmes linéaires

⋆ **Exercice 1** Résoudre, en discutant suivant les valeurs de $a \in \mathbb{C}$, le système :

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x & +y & +z & = 3 \\ x & -y & +3z & = 8 \\ x & +2y & +2z & = -3 \\ x & +y & +2z & = a \end{array}\right.$$

⋆ **Exercice 2** Résoudre le système suivant $(\Sigma_{(a,b,c)})$, en fonction des paramètres a, b, c.

$$(\Sigma_{(a,b,c)}) : \left\{\begin{array}{llll} x & +y & -3z & = a \\ x & +3y & & = b \\ -x & +2y & +6z & = c \end{array}\right.$$

2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

⋆ **Exercice 3** Soit $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},$ telles que u est une suite convergente$\}$ l'espace vectoriel des suites réelles convergentes. Montrer que les sous-espaces F, constitué des suites de limite nulle, et G, constitué des suites constantes, sont supplémentaires dans E.

⋆ ⋆**Exercice 4** Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On considère F l'ensemble des fonctions f de E telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E puis en donner un supplémentaire.

3 Familles libres, familles liées

⋆ **Exercice 5** Soit E les $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les applications $(x \to |x|)$, $(x \to |x-1|)$, $(x \to |x+1|)$ forment une famille libre dans E.
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note f_α la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_\alpha(x) = |x - \alpha|$.
   Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$.
   Montrer que $(f_{\alpha_1}, \cdots, f_{\alpha_n})$ est une famille libre.
3. Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$.
   Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note g_α la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ g_\alpha(x) = \exp(\alpha x)$. Montrer que $(g_{\alpha_1}, \cdots, g_{\alpha_n})$ est une famille libre.

⋆ ⋆**Exercice 6** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soient $u_1, \cdots, u_n$ des vecteurs de E.
Pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, on pose $v_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} u_k$.
Montrer que : si la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre, alors la famille $(v_1, \cdots, v_n)$ l'est aussi.

4 Bases

⋆ **Exercice 7**

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$.
   Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui, en donner une base.
2. Même question avec $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 3y - 4z = 0\}$.

⋆ **Exercice 8**

1. Donner une base de chacun des espaces vectoriels suivants :
   $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$ tels que $x + y + z = 0\}$
   $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$ tels que $x + 3y + z = 0\}$
   $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$ tels que $x + 2y = 0$ et $z + 3y = 0\}$
   $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,$ tels que $x + 2y + t = 0$ et $x + y + z + 2t = 0\}$
2. Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels. Peut-on en donner des bases ?

$$F = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1]),\ \ f'' + f = 0\}$$

$$G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \ \text{tel que } : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + c\}$$

⋆ **Exercice 9** Soit E l'ensemble des matices à coefficients complexes, de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Si oui,en donner une base et la dimension.

♡ ⋆ ⋆ **Exercice 10** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la famille $(1, (X-a), \cdots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X)$.
2. Pour $p \leq n$, donner les coordonnées de X^p dans cette base.
3. Exprimer les coordonnées dans cette base d'un polynôme quelconque en fonction de ses dérivées en a.

♡⋆ **Exercice 11** Donner la dimension de l'espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis celle de l'espace des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

⋆ **Exercice 12**

1. Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la famille $\overrightarrow{x_1} = (1,1,1,1)$, $\overrightarrow{x_2} = (1,1,2,2)$
2. Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la famille $\overrightarrow{x_1} = (1,0,0,0)$, $\overrightarrow{x_2} = (1,1,2,0)$
3. Compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ la famille $\overrightarrow{x_1} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{x_2} = (1,1,2)$

5 Applications linéaires

♡ ⋆ ⋆ **Exercice 13** Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que : $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E = 0$.

1. Trouver deux réels a et b tels que : $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E = (u - a\mathrm{Id}_E) \circ (u - b\mathrm{Id}_E) = (u - b\mathrm{Id}_E) \circ (u - a\mathrm{Id}_E)$
2. Montrer que les ensembles $F_1 = \{\vec{x} \in E \,|\, u(\vec{x}) = \vec{x}\}$ et $F_2 = \{\vec{x} \in E \,|\, u(\vec{x}) = 2\vec{x}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
3. Montrer enfin que les sev F_1 et F_2 sont des sev supplémentaires de E.

⋆⋆ **Exercice 14** Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Démontrer les équivalences :

1. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$;
2. $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g) \iff \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f) = E$.

♡⋆ **Exercice 15** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que :

$$\exists (a_0, \cdots a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } : a_0 \neq 0 \text{ et } f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 Id = f^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Montrer que : f est un automorphisme de E expliciter f^{-1} en fonction de f et de ses puissances successives.

♡ ⋆ ⋆**Exercice 16** Soit un entier $n \geq 1$, et $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On définit l'opérateur dérivation D par : $\forall P \in E$, $D(P) = P'$.

1. Montrer que D est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image.
2. Calculer $(\mathrm{Id}_E - D) \circ (\mathrm{Id}_E + D + D^2 + \cdots + D^n)$.
3. Justifier que D est un endomorphisme nilpotent de E, c'est à dire qu'il existe un entier p tel que $D^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
4. Montrer que $\mathrm{Id}_E - D$ est un isomorphisme de E.
   Résoudre alors, dans E puis $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'équation différentielle suivante : $y'(x) - y(x) = \dfrac{x^n}{n!}$.

♡ ⋆ ⋆ **Exercice 17** Soit E l'espace des suites réelles.

1. On considère l'application φ définie sur E de la manière suivante : $\varphi(u) = v$ avec $: \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1}$.
   Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Justifier que $\varphi - 3\mathrm{Id}_E$ est aussi un endormphisme de E. Exprimer le terme général de $(\varphi - 3\mathrm{Id}_E)(u)$.
3. Dans cette question, on cherche toutes les suites satisfaisant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2^n.$$

   (a) Chercher si il existe une suite géométrique satisfaisant cette récurrence.
   (b) Déterminer l'ensemble S des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant à la relation de récurrence ci-dessus.

6 Applications linéaires en dimension finie

♡⋆**Exercice 18** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ des nombres complexes distincts deux à deux.
Soit par ailleurs $f : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}^{n+1}$, $P \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$.

1. Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$.
2. Soit $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$.
   Que peut-on dire de la famille $(f^{-1}(e_0), f^{-1}(e_1), \dots, f^{-1}(e_n))$?
3. Donner une forme factorisée de $f^{-1}(e_i)$ pour tout $i \in [\![0\,;\,n]\!]$.

♡⋆ **Exercice 19** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

♡⋆⋆**Exercice 20** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \neq 0$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Pour p entier naturel, on pose $K_p = \mathrm{Ker}(f^p)$ et $I_p = \mathrm{Im}(f^p)$.

1. Question préliminaire : montrer que :
$$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2,\ \mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u) \iff \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}.$$
2. Montrer qu'il existe un entier r tel que : $I_r = I_{r-1}$ et $K_r = K_{r-1}$.
   Montrer qu'on a alors : $\forall s \geq r,\ I_r = I_s$ et $K_r = K_s$.
3. Montrer que : $\forall s \geq r,\ E = I_s \oplus K_s$.

7 Matrices

♡⋆⋆**Exercice 21**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I + J$. Calculer J, J^2, J^3... puis A^n à l'aide de la formule du binôme.
2. Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = T + I_3$. Calculer J^2, puis par récurrence J^n. Ensuite appliquer la formule du binôme pour calculer T^n en écrivant $T = J - I_3$.
3. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1.
   Que vaut J^k pour $k \in \mathbb{N}$?
   Donner le rang de J et une base de $\mathrm{Ker}(J)$.

♡⋆**Exercice 22** On note J la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer J^n pour tout entier n.
2. On pose $A = 2I + 3J$. Calculer les puissances de A.
3. Généralisation : calculer les puissances de $B = aI + bJ$.

⋆**Exercice 23** On considère la matrice réelle définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer l'espace vectoriel F engendré par les puissances entières de M. En trouver une base.
3. ⋆⋆ Trouver l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commutant avec M

⋆**Exercice 24** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. Si existence, donner A^{-1}. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

♡⋆**Exercice 25**

1. Montrer que : si la matrice carrée A vérifie $A^2 + A + 2I_n = 0$, alors elle est inversible.
2. Montrer que : si $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots a_1 A + a_0 I_n = 0$ avec $a_0 \neq 0$, alors A est inversible et le calcul de A^{-1} se fait aisément.

♡♡⋆**Exercice 26** Soit $\mathcal{B} = \{E_{i,j},\ (i,j) \in \{1,..,n\}^2\}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.
Montrer que $E_{i,j}E_{k,l} = 0$ si $j \neq k$ et $E_{i,j}E_{k,l} = E_{i,l}$ si $j = k$.

⋆**Exercice 27** Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \dots & a_2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

⋆**Exercice 28** Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

⋆**Exercice 29** Déterminer rang, noyau et Image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

♡ ⋆ ⋆**Exercice 30** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. La formule reste-t-elle valable pour les entiers négatifs ?

♡⋆**Exercice 31** On dit qu'une matrice Mest *nilpotente* si il existe un entier naturel non nul k tel que $M^k = O$.
Soient A et B deux matrices qui commutent, c'est à dire que $AB = BA$.
Montrer que si : A est nilpotente, alors AB l'est aussi et $I_n - A$ est inversible.
Montrer que si A et B sont toutes les deux nilpotentes, alors $A + B$ l'est aussi.

⋆⋆**Exercice 32** Matrices à diagonale strictement dominante :
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On suppose que :

$$\forall i \in \{1,2,...,n\}, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$$

1. Donner un exemple de matrice non diagonale de $M_3(\mathbb{R})$ qui soit à diagonale strictement dominante.
2. On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $X \neq 0$, $AX = 0$ et $(\forall i \in \{1,2,...,n\}, \quad |x_1| \geqslant |x_i|)$.
   Aboutir à une contradiction en utilisant la première ligne du système $AX = 0$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots x_n \end{pmatrix}$ tel que $X \neq 0$, $AX = 0$.
4. En déduire que A est inversible.

8 Matrices et applications linéaires

⋆**Exercice 33** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soit u l'application définie par $u(P) = P' + 2P$.
Montrer que u est un endomorphisme de E et donner sa matrice relativement à la base canonique de E.

♡⋆**Exercice 34** Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}_3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
Déterminer le rang de f ainsi que des bases de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

♡⋆**Exercice 35** Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (2,3,3)$ et $u_3 = (3,7,1)$.
Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de E.
Soit $f = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et soit (x',y',z') le triplet de coordonnées de f dans la base (u_1,u_2,u_3). Quelle est la relation entre (x,y,z) et (x',y',z') ?

⋆⋆**Exercice 36** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de E. À tout polynôme P de E, on associe :

$$\Phi(P) = 3XP' + (X^2 - 1)P''$$

1. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$. Écrire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Φ est-il un automorphisme de E ?
3. On considère ici $n = 3$. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\Phi)$ et une base de $\mathrm{Ker}(\Phi)$ à l'aide de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)$.

♡⋆**Exercice 37** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On pose $f_1 = (0, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, 0)$ et $f_3 = (0, 1, 0)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
4. En utilisant la formule de changement de base, déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$ et vérifier le résultat obtenu.

⋆⋆ **Exercice 38** Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit ϕ l'application de E dans E définie par $\phi(X) = AX$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de E.
2. Déterminer le rang et le noyau de ϕ.

⋆**Exercice 39** On considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{C}_n[X]$ définis par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ f(P) = P + P' \text{ et } g(P) = P - P' + P''..... + (-1)^n P^{(n)}.$$

1. Montrer que f et g sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.
2. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ et déterminer son inverse.

⋆**Exercice 40** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déteminer le rang de A ainsi que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.
2. A est-elle semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

⋆⋆**Exercice 41** Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Déterminer une matrice P inversible telle que $A = P^{-1}TP$
Calculer T^n, puis en déduire A^n.

⋆**Exercice 42** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = P + P'$.

1. Justifier rapidement que f réalise un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \cdots, X^n)$.
3. f est-elle bijective ?
4. On pose $Q_0 = 1$, $Q_1 = X, \cdots, Q_k = \dfrac{n!}{k!}X^k, \cdots, Q_n = \dfrac{n!}{n!}$.
   Justifier (très rapidement) que $(Q_0, \cdots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base de $\mathbb{R}_n[X]$?
6. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & n-1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Ces matrices sont-elles semblables ?

9 Projecteurs et symétries

♡⋆**Exercice 43** Soit $E=\mathbb{R}^3$. Soient $E_1=$vect$\{\vec{e_1}=(1,0,0),\ \vec{e_2}=(1,1,0)\}$, et $E_2=$Vect$\{\vec{e_3}=(1,2,3)\}$. Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E. Donner l'expression du projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 puis l'expression du projecteur sur E_2 parallèlement à E_1. Que vaut $p+q$?

⋆**Exercice 44** : Pour chacune des applications définies ci -dessous, on dira si ce sont des projecteurs et si c'est le cas, on précisera leur base et leur direction.
a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, définie par $f(x,y,z)=(x,y,0)$. b) $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, définie par $g(x,y,z)=(x+z,y+z,0)$.

♡⋆**Exercice 45**
Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3=P\oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallelement à D.
   Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

♡⋆ **Exercice 46** Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A=\begin{pmatrix}-2&4&2\\-4&8&4\\5&-10&-5\end{pmatrix}$
Montrer que f est un projecteur. Déterminer des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de son image et de son noyau.

⋆ **Exercice 47** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\neq 0$ et soit p un projecteur de E.
Montrer que rg(p)=Tr(p). Quels sont le rang et la trace de la symétrie associée à p ?

⋆⋆**Exercice 48** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E.
a) Montrer que p et q ont même image si et seulement si ($p\circ q=q$ et $q\circ p=p$.)
b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que p et q aient la même direction, c'est à dire le même noyau. (On pourra poser $p'=$Id$-p$, $q'=$Id$-q$, puis montrer que p' et q' sont des projecteurs, dont on identifiera les noyaux et images. Puis utiliser la question précédente.)
c) Montrer que l'endomorphisme $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q=q\circ p=0$.

⋆ **Exercice 49** Soit f, un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev vérifiant $f=\alpha p+\beta q$, où p et q sont des projecteurs de E tels que $p\circ q=q\circ p=0$ et α, β des scalaires. Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ une expression simple de f^n.

10 Hyperplans

⋆ **Exercice 50** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2.
Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E, dictincts. Déterminer la dimension de $H_1\cap H_2$.

⋆ **Exercice 51**

1. Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, de dimension finie $n\geqslant 2$.
   Soit a un vecteur de E qui n'appartient pas à H. Montrer que $H\oplus$Vect$(a)=E$
2. Soit E un espace vectoriel de dimension infinie. Soit H un sous-espace vectoriel tel qu'il existe une droite vectoriel D vérifiant : $E=H\bigoplus D$ (notion d'hyperplan généralisée à un espace de dimension infinie).
   Montrer que $H\oplus$Vect$(a)=E$

Sous-espaces stables

⋆ **Exercice 52** Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On suppose que u et v commutent, c'est-à-dire que $u\circ v=v\circ u$. Montrer que Im(u) et Ker(u) sont stables par v.

⋆⋆ **Exercice 53** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$u^3+u=0.$$

1. Montrer que l'espace Im(u) est stable par u.
2. Pour $x\in$ Im(u), calculer $u^2(x)$.
3. Soit v l'endomorphisme induit par u sur Im(u). Montrer que v est un automorphisme de Im(u).

Trace

♡⋆**Exercice 54** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et p un projecteur de E.

1. Montrer que rg(p) =tr(p). (Utiliser une base de E dans laquelle la matrice de p permet de conclure).
2. Quels sont le rang et la trace de la symétrie associée à p ?