Dans tout ce qui suit, I et J désigneront des intervalles de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$, l'intervalle I étant de plus supposé non réduit à un point.

I Questions pour se mettre en route

I.1 Pures questions de cours

1. Que signifie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$? (définition avec les quantificateurs attendue)
   Que signifie $\lim\limits_{x\to x_0,\, x>x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$?
   Que signifie $\lim\limits_{x\to x_0,\, x>x_0} f(x) = +\infty$?
2. Qu'est-ce qu'une fonction continue en un point ? Sur un intervalle ?
3. Si f a une limite en x_0 et (u_n) est une suite tendant vers x_0, que peut-on en déduire ? Enoncer clairement le théorème utilisé. Connaissez-vous des application de ce théorème ?
   Montrer que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.
4. Quels théorèmes d'encadrement connaissez-vous ?
5. Quels théorèmes de passage à la limite connaissez-vous ?
   Quelle est la différence entre un théorème d'encadrement et un théorème de passage à la limite ?
6. Si f est une fonction monotone, peut-on en déduire qu'elle a des limites en certains points ? Aux extrémités de l'intervalle ? Enoncez les théorèmes que vous connaissez.
7. Enoncez le théorème des valeurs intermédiaires (il en existe 3 ou 4 énoncés proches) et le theorème des bornes atteintes.
8. Enoncez le théorème de la bijection (monotone).
   Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Démontrer que l'équation d'inconnue x : $2\sqrt{x}e^{-x} = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution dans le segment $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
9. Enoncez le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis. Quelles applications de ces théorèmes connaissez-vous ?
10. Connaissez-vous une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction dérivable sur un intervalle soit strictement croissante ?
11. Enoncez le théorème de la limite de la dérivée.
12. Si f est une bijection dérivable de I vers J, comment calcule-t-on la dérivée de f^{-1} ? Calculez la dérivée de Arctan.
13. Formule de Leibniz
14. Donner les dérivées k-èmes de ln, exp, $(x \to \exp(\alpha x))$, $(x \to x^n)$, $(x \to a^x)$, cos, sin.
15. Formules de Taylor : énoncez celles que vous connaissez (avec hypothèses !). A quoi servent-elles ?
16. Donnez tous les développements limités et équivalents usuels que vous connaissez.
17. Enoncez les théorèmes de croissances comparées (attention : ne pas se cantonner aux limites apprises au lycée ! ! !)

I.2 Et maintenant, un petit Quizz : Vrai/Faux ? ?

1. Toute fonction qui admet une limite en un point y est continue.
2. Si f est croissante sur $]a, b[$, minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie en a, en b.
3. Une fonction injective sur un intervalle I est strictement monotone.
4. Si f est strictement croissante sur l'intervalle I et sur l'intervalle J, alors f est strictement croissante sur $I \cup J$.
5. Une fonction strictement monotone est injective.
6. Si f est continue sur $]a, b[$ et admet une limite finie en a et en b, alors f est bornée sur $]a, b[$.
7. Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant une limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
8. Si une fonction périodique est dérivable, alors sa dérivée est périodique.
9. Si f est dérivable et f' périodique, alors f est périodique.
10. Si f est paire (resp. impaire), alors f' est impaire (resp. paire).
11. Si f' est paire alors f est impaire.
12. Si f est bijective de I vers J et $f'(x_0)$ existe (avec $x_0 \in I$), alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$.
13. Si f a un DL à l'ordre 0 en x_0, alors f est continue en x_0.
14. Si f a un DL à l'ordre 1 en x_0, alors f est dérivable en x_0.
15. Si f a un DL à l'ordre 2 en x_0 et si $f(x_0)$ existe, alors f est dérivable deux fois en x_0.

II Limites et continuité

II.1 Généralités

Theorème-Definition 1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f définie sur un intervalle I tel que $a \in I$ ou bien a est une extrémité de I (ce que l'on note : $a \in \overline{I}$). On dit que f *a une limite finie en* a si :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \quad \text{tel que } : (\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap [a-\alpha, a+\alpha], \ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Un tel réel ℓ, si il existe, est unique. On l'appelle alors « limite de f en a.

On définit aussi la notion de *limite à gauche* ou limite *à droite* en a.

Proposition 1 Si f a une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a. La réciproque est fausse.

Définition 1 On dit que f *est continue* $a \in I$ si : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ \forall x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha], \ |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$, ce que l'on peut aussi écrire (en abrégeant légèrement) : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.
On dit que f *est continue à droite en* a si : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ (|x-a| \leqslant \alpha \text{ et } x \geqslant a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.
On dit que f *est continue à gauche en* a si : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ (|x-a| \leqslant \alpha \text{ et } x \leqslant a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 1 f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition 2
- Une fonction f est dite continue sur un intervalle I ouvert lorsqu'elle est continue en $a \in I$.
- Une fonction f est dite continue sur un segment $I = [\alpha, \beta]$ lorsqu'elle est continue en tout point de $]\alpha, \beta[$ et qu'elle est continue à droite en α et à gauche en β.
- On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs réelles.

On définit de manière analogue la notion de limite infinie, et l'on peut considérer $a \in \overline{\mathbb{R}}$....

II.2 Suites et fonctions

Théorème 1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \overline{I}, \ a \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, alors : pour toute suite (u_n) de limite a, on : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$.
- Si f est continue en $a \in I$, alors : pour toute suite (u_n) de limite a, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Exemple 1 On en déduit que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$, ou que la fonction $(x \to \sin(1/x))$ n'a pas de limite en 0.

Exemple 2 Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$: si f continue en tout point de I , et (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors $\lim u_n$ est un point fixe de f, c'est à dire : $f(\ell) = \ell$.

II.3 Limites et inégalités

(a) Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. :

Théorème 2 Si $\lim\limits_a f = \ell_1$ et $\lim\limits_a g = \ell_2$ et $f \leq g$ au voisinage de a, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

⚠ *Attention : on ne conserve pas d'inégalités strictes en passant à la limite !!*

(b) Théorèmes d'existence d'une limite par encadrement ou par comparaison .

Théorème 3 Th. d'encadrement. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_a f = \ell \\ \lim\limits_a h = \ell \\ f \leq g \leq h \text{ au voisinage de } a \end{array} \right\}$ alors g a une limite en a et de plus $\lim\limits_a g = \ell$

Corollaire 1 Si ($|f(x) - \ell| \leq g$ au voisinage de a et $\lim\limits_a g = 0$) alors $\lim\limits_a f = \ell$.

Corollaire 2 Si $\lim\limits_a f = \ell$ alors $\lim\limits_a |f| = |\ell|$. La réciproque est fausse.

Corollaire 3 Si (f bornée au voisinage de a et $\lim\limits_a g = 0$) alors $\lim\limits_a fg = 0$

Théorème 4
- **Th. de minoration** : Si $\lim\limits_a f = +\infty$ et $f \leq g$ au voisinage de a, alors
- **Th. de majoration** : Si $\lim\limits_a g = -\infty$ et $f \leq g$ au voisinage de a, alors

II.4 Limites de fonctions monotones

Théorème 5 (de la limite monotone) : Soit $(a, b) \in \bar{\mathbb{R}}$. Soit f une fonction monotone sur $]a, b[$.
Alors f admet en tout point des limites à droite et à gauche.

Limites aux extrémités : f admet une limite à droite en a et f admet une limite à gauche en b. Par exemple : si f est croissante et majorée, alors $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = \sup\limits_{]a,b[}(f)$ et si f est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty$.
Etc...
Si $c \in]a, b[$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x)$ existent et sont finies. (On les note souvent respectivement : $f(c^-)$ et $f(c^+)$).

De plus si f est croissante on a : $f(c^-) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x) = \sup\limits_{]a,c[}(f) \leq f(c) \leq f(c^+) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x) = \inf\limits_{]c,b[}(f)$.

Et si f est décroissante, on a : $f(c^-) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x) = \inf\limits_{]a,c[}(f) \leq f(c) \leq f(c^+) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x) = \sup\limits_{]c,b[}(f)$.

II.5 Structure de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, opérations dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

- $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Si f est continue sur I, alors $|f|$ l'est aussi.
- Si f et g sont continues sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ et $f \cdot g$, sont continues sur I.
- Si f est continue sur I et si f ne s'annule en aucun point de I, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue sur I.
- Si $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$, alors $g \circ f$ est continue sur I (ne pas oublier de vérifier que $f(I) \subset J$).

Exercice 1 On suppose f et g continue sur I. Montrer que $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues sur I.

II.6 Théorème des valeurs intermédiaires.

On peut en donner plusieurs énoncés équivalents.

Théorème 6 Si f continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Théorème 7 Si f est continue sur I et ne s'annule en aucun point de I, alors f garde un signe constant sur I.

Théorème 8 Si f est continue sur I, alors :
$\forall (a,b) \in I^2$, toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f.

et en utilisant le fait que les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, on obtient :

Théorème 9 L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

II.7 Théorème fondamental admis

Théorème 10 Si f est continue sur $[a,b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes (et $f([a,b]$ est un intervalle).

Corollaire 4 L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Autrement dit : si f est continue sur $[a,b]$, alors il existe des réels m et M tels que $f([a,b]) = [m,M]$.

II.8 Théorème de la bijection monotone

Théorème 11 Enoncé correct mais très insuffisant.
Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et sa réciproque est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que f.

Le théorème de la bijection n'est pas commode à exprimer en toute généralité. Il vaut mieux l'exprimer simplement de manière spécifique pour les cas que l'on doit traiter.

Théorème 12 Soit $I = [a,b]$ un segment.
Toute fonction f continue et strictement croissante sur I réalise une bijection de $I = [a,b]$ sur $J = [f(a), f(b)]$, et sa réciproque est continue, strictement croissante sur J.

Théorème 13 Soit $I = [a,b]$ un segment.
Toute fonction f continue et strictement décroissante sur I réalise une bijection de $I = [a,b]$ sur $J = [f(b), f(a)]$, et sa réciproque est continue, strictement décroissante sur J.

Théorème 14 Soit $I = [a,b[$ un intervalle (on suppose que $b \in \overline{\mathbb{R}}$).
Toute fonction f continue et strictement croissante sur I réalise une bijection de $I = [a,b[$ sur $J = [f(a), \lim\limits_{b^-} f[$, et sa réciproque est continue, strictement croissante sur J.

Théorème 15 Soit $I =]a,b[$ un intervalle (on suppose que $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$).
Toute fonction f continue et strictement monotone sur I réalise une bijection de $I =]a,b[$ sur $J =]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f[$ si f est croissante et sur $J =]\lim\limits_{b^-} f, \lim\limits_{a^+} f[$ si f est décroissante.
La réciproque de f est continue et de même monotonie que f.

Remarque 2 Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors le graphe de f^{-1} est symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice.

Application et rédaction standard sur des exemples :

1. *Combien l'équation* «$\sin(x) = 0$» *a-t-elle de solutions dans l'intervalle* $[-\pi/2, \pi/2]$ *?*[1]
2. *Montrer que : l'équation* $\tan(x) = x + 1$ *admet une unique solution sur l'intervalle* $[0, \pi/2[$.[2]

1. La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Donc (d'après le théorème de la bijection monotone), elle réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[\sin(-\pi/2), \sin(\pi/2)] = [-1, 1]$.
Or $0 \in [-1,1]$. Donc : $\exists ! x \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin(x) = 0$.

2. Posons $f(x) = \tan(x) - x - 1$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, \pi/2[$.
(Strictement croissante car $f'(x) =$). Donc f réalise une bijection de $[0, \pi/2[$ vers $J = [f(0), \lim\limits_{x \to \pi/2} f(x)[$ soit $J = [-1, +\infty[$. Or $0 \in J$. Donc il existe un unique $x \in [0, \pi/2[$ tel que $f(x) = 0$ c'est à dire $\tan(x) = x + 1$.

3. *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Démontrer que l'équation d'inconnue x : $2\sqrt{x}e^{-x} = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution dans le segment $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.* [3]

Utilisations classiques de ce théorème :

1. Définition de suites de manière implicite (voir exercices 15-16-17 de la feuille 1).
2. Définition des fonctions Arccos, Arcsin, Arctan....

III Dérivation

III.1 Définitions, propriétés élémentaires

Définition 3 • On dit que f est **dérivable en** a si la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **existe** et est **finie**.

On note alors cette limite $f'(a) := \lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, appelée **nombre dérivée de f au point a**.

- On peut définir (si elle existe) la dérivée à gauche : $f'_g(a) = f'(a^-) = \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, et la dérivée à droite : $f'_d(a) = f'(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$
- Si la fonction f est dérivable en tout point a de I, alors on dit que f est dérivable sur I. On peut, dans ce cas, définir la fonction $f' : \left| \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f'(a) := \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \end{array} \right.$.

  Autre notation : $f' = f^{(1)} = \dfrac{df}{dx}$.
- Si f est dérivable sur I et si de plus f' est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on note $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$.

Proposition 2 On suppose que f est définie en a. Alors on a l'équivalence :
(f est dérivable en a) $\Leftrightarrow$ (f possède, en a, un développement limité d'ordre 1 ($\mathrm{DL}_1(a)$)).
De plus, on a alors : $f(x) = f(a) + f'(a)\times(x-a) + (x-a)\times\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Proposition 3 Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a ; la réciproque est fausse.

Définition 4 Soit $a \in I$. On dit que f admet un **maximum local** en a lorsqu'il existe un $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a-\alpha, a+\alpha],\ f(x) \le f(a).$$

De même, on définit la notion de **minimum local** en remplaçant $f(x) \le f(a)$ par $f(x) \ge f(a)$.
On dit que f a un extremum local en a lorsque f a un maximum ou un minimum local en a.

Proposition 4 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in \overset{\circ}{I}$.
Alors : (f a un extremum local en a) $\Rightarrow f'(a) = 0$).

Attention : le point a doit bien être un point intérieur à I. De plus : la réciproque de cette propriété est fausse.
Par exemple :

3. Soit f la fonction définie sur $[0; +\frac{1}{2}]$ par : $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$. Après calcul (à faire), on a : $f'(x) = \dfrac{1-2x}{\sqrt{x}} \times e^{-x}$, d'où $f'(x) > 0$ sur $[0, \frac{1}{2}[$ et donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0, \frac{1}{2}]}$.
Par ailleurs $\boxed{f \text{ est continue sur } [0, \frac{1}{2}]}$. Donc $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [0, \frac{1}{2}] \text{ vers } [f(0), f(\frac{1}{2})] = [0, f(\frac{1}{2})]}$.
Vérifions que $0 \le \frac{1}{n} \le f(\frac{1}{2}) (*)$. L'inégalité $(*)$ signifie : $0 \le \frac{1}{n} \le \sqrt{\frac{2}{e}}$ ce qui est équivalent à : $n^2 \ge \frac{e}{2}$, ce qui est vrai dès lors que $n \ge 2$.
Donc : $\boxed{0 \le \frac{1}{n} \le f(\frac{1}{2})}$ d'où $\frac{1}{n}$ a un unique antécédent par f, ce qui assure que : $\boxed{\exists! a_n \in [0, \frac{1}{2}],\ f(a_n) = \frac{1}{n}}$

III.2 Théorème de Rolle et applications

Théorème 16 Th. de Rolle.
- SI f est continue sur le segment $[\overleftrightarrow{a,b}]$
- SI f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]\overleftrightarrow{a,b}[$
- SI $f(a) = f(b)$

ALORS la dérivée de f s'annule (au moins une fois) sur $]\overleftrightarrow{a,b}[$.

Autrement dit : il existe $c \in]\overleftrightarrow{a,b}[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 17 Th. des accroissements finis.
- SI f est continue sur le segment $[\overleftrightarrow{a,b}]$
- SI f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]\overleftrightarrow{a,b}[$

ALORS : il existe $c \in]\overleftrightarrow{a,b}[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Autre formulation du théorème :

Si f est continue sur $[a, a + h]$, dérivable sur $]a, a + h[$, alors il existe $\theta \in]0, 1[$, tel que $f(a+h) = f(a)+hf'(a+\theta h)$.

Corollaire 5 Inégalités des accroissements finis.

Si f est dérivable sur I et si $|f'| \leq K$ sur I, alors : $\forall (a, b) \in I^2,\ |f(b) - f(a)| \leq K|b - a|$.

Dérivée et variations

Théorème 18 Si f est dérivable sur l'intervalle I, alors on a les équivalences
- $(f' \geq 0$ sur $I) \Leftrightarrow (f$ est croissante sur $I)$
- $(f' \leq 0$ sur $I) \Leftrightarrow (f$ est décroissante sur $I)$
- $(f' = 0$ sur $I) \Leftrightarrow (f$ est constante sur $I)$
- $(f$ est strictement croissante sur I $) \iff \begin{cases} \forall x \in I,\ f'(x) \geq 0, \\ f' \text{ n'est la fonction nulle sur aucun segment non trivial} \end{cases}$

Théorème 19 Si f est dérivable sur l'intervalle I, alors on a les implications
- $(f' > 0$ sur $I) \Rightarrow (f$ est strictement croissante sur $I)$
- $(f' < 0$ sur $I) \Rightarrow (f$ est strictement décroissante sur $I)$
- Attention : $(f$ est strictement croissante sur $I)$ n'implique pas $(f' > 0$ sur $I)$
- Si $f' > 0$ sur I, sauf en un nombre fini de points $a_1 < \cdots < a_n$, alors f est strictement croissante sur I.

Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 20 Si f est dérivable sur $I \backslash \{a\}$, continue sur I et si $f'(x)$ tend vers ℓ (réel ou infini) lorsque x tend vers a, alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a.
Si ℓ est de plus un nombre réel, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
Si $\ell \in \{+\infty,\ -\infty\}$, alors la courbe représentative de f admet une tangente verticale en a.

Remarque 3 Si f est dérivable sur $I \backslash \{a\}$, continue sur I et si f' n'a pas de limite au point a, on ne peut rien conclure directement quant à la dérivabilité de f en a. Pour le savoir, il faut alors examiner l'existence de la limite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Exemple 3 Etude de $(x \to x^i \sin(1/x)$ pour $i = 1, 2, 3$.

III.3 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 21 Si f est dérivable sur un intervalle I et si f' a un signe constant strict sur I (par conséquent f' ne s'annule pas sur I),
alors f établit une bijection de I vers l'intervalle $J = f(I)$. De plus la bijection réciproque f^{-1} est dérivable en tout point b de $J = f(I)$ et on a la formule

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$$

Autrement dit, en posant $b = f(a)$, on a : $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Application : dérivée des fonctions ln, arctan, Arccos, Arcsin.

III.4 Dérivées successives.

On note $f^{(0)} := f$. Si f est dérivable sur I, on note $f^{(1)} = f' = \dfrac{\mathtt{d}f}{\mathtt{d}x}$ et on note $f'(x) = \dfrac{\mathtt{d}f(x)}{\mathtt{d}x}$.
Si $f^{(n)}$ est dérivable sur I (avec $n \in \mathbb{N}$), on note $f^{(n+1)} = (f^{(n)})' = \dfrac{\mathtt{d}^{n+1}f}{\mathtt{d}x^{n+1}}$ et $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathtt{d}^n(f(x))}{\mathtt{d}x^n}$.
$f^{(n)}$ s'appelle la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f sur I.
Si $f^{(n)}$ existe et si $f^{(n)}$ est continue sur I, on dit que f est de **classe** C^n **sur** I.
On dit que f est de classe C^∞ sur I si $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ existe, autrement dit si f est in(dé)finiment dérivable sur I.
Exemples : les polynômes, exp, $(x \to a^x)$, cos, sin sont des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions ln, $[x \mapsto \frac{1}{x}]$, tan, les fractions rationnelles $F = \frac{P}{Q}$ (où P et Q sont deux polynômes, $Q \neq \tilde{0}$), sont des fonctions de classe C^∞ sur leurs ensembles de définition respectifs.
A faire : Donner les dérivées k-èmes de ln, exp, $(x \to \exp(\alpha x))$, $(x \to x^n)$, $(x \to a^x)$, cos, sin.
Notation : $C^n(I)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^n (au moins) sur I.

III.5 Opérations sur les dérivées

Si $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors $\mathcal{C}^m(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
L'application $(f \to f')$ est linéaire. (On dit « la dérivation est linéaire »)

Formule de Leibniz : Si $(f, g) \in (\mathcal{C}^m(I, \mathbb{R}))^2$ alors $f \times g \in \mathcal{C}^m(I, \mathbb{R})$ et pour $n \leqslant m$: $(f \times g)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$.

Si g est dérivable sur I et ne s'annule en aucun point de I, alors $\left(\dfrac{1}{g}\right)$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.
Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et : $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), **quotient**, **composée**, **réciproque**.

IV Formules de Taylor

Soit n un entier naturel et soit f une fonction dérivable n fois sur un intervalle I. Si $(a, b) \in I^2$, on notera dans tout ce qui suit :

$$Q_{n,a} = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

Et si 0 et x sont dans I, on notera : $P_n(x) = f(0) + \dfrac{x}{1!} f'(0) + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$

Théorème 22 Formule de Taylor avec reste intégral : Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et $(a, b) \in I^2$, on a :

$$f(b) = Q_{n,a} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

En particulier pour $a = 0$ et $b = x$, on obtient : $f(x) = P_n(x) + \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

Théorème 23 Inégalité de Taylor-Lagrange : Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et si $|f^{(n+1)}|$ est majorée par M sur I, alors, pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$|f(b) - Q_{n,a}| \leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

En particulier, si 0 et x sont dans I, on obtient pour $a = 0$ et $b = x$:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Théorème 24 Formule de Taylor-Young : Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$, alors

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + h^n \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n) \text{ (expression valable pour } a+h \in I)$$

Autre formulation (plus usuelle) : Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ où I est un intervalle contenant 0, alors pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P_n(x) + o(x^n)$$

Remarque 4 Formule de Taylor exacte pour les polynômes. Une fonction polynomiale P est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc on peut appliquer ces formules avec n quelconque. Prenons par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange avec $n \geq deg(P)$. Alors $P^{(n+1)} = 0$ donc :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P(b) = P(a) + \frac{(b-a)}{1!}P'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}P^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}P^{(k)}(a)$$

V Développements limités

Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel que $x_0 \in \overline{I}$.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n en x_0 (et je noterai $DL_n(x_0)$) si il existe un polynôme P_n et une fonction ε définie sur I, tels que : $\forall x \in I,\quad f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \times \varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{x_0} \varepsilon = 0$.

Si f admet un $DL_n(x_0)$), alors le polynôme P_n mentionné ci-dessus est unique. On le nomme alors partie principale (ou régulière) du développement limité en 0.
DL d'une fonction paire, d'une fonction impaire ? ?
Si f a un DL_n, alors f a un DL_p où $p < n$ obtenu en tronquant le DL_n de f.
Si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0) \times \varepsilon(x)$ alors l'équation de la tangente est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.

Supposons $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^k \times \varepsilon((x - x_0))$ avec $k > 1$ et $a_k \neq 0$.

- Si k est pair et $a_k > 0$, alors la courbe est localement au dessus de la tangente en x_0.
- Si k est pair et $a_k < 0$, alors la courbe est localement au dessous de la tangente en x_0.
- Si k est impair, la courbe traverse sa tangente en x_0 (point d'inflexion). (NB : si on a un point d'inflexion, alors nécessairement, $a_2 = 0$.)

Opérations sur les DL en x_0 Soit $a \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et admettant des DL à l'ordre n en x_0, de parties principales respectives P_n et Q_n.
Alors $f + g$ et af admettent des DL à l'ordre n en 0, dont $(P_n + Q_n)$ et aP_n sont les parties principales respectives.
De même : $f \times g$ admet un $DL_n(x_0)$ dont la partie principale est obtenue en tronquant $P_n \times Q_n$ à l'ordre n.
Si $f(x_0) = a_0$ et si g admet un $DL_n(a_0)$, alors $g \circ f$ admet un $DL_n(x_0)$ dont la partie principale est obtenue en tronquant à l'ordre n le composé des développements limités.
Si f a un $DL_n(x_0)$ et $f(x_0) \neq 0$. Alors $\frac{1}{f}$ a un $DL_n(x_0)$ obtenu en écrivant :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_0) + f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f(x_0) \times \left(1 + \frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}\right)} = \frac{1}{f(x_0) \times (1 + h(x))}$$

où $h(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}$. Il ne reste plus qu'à utiliser le DL de $\dfrac{1}{1+u}$.

Théorème 25 Intégration d'un DL. Soit f une fonction continue au voisinage de x_0. Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors toutes les primitives de f admettent un $DL_{n+1}(x_0)$.

De plus, si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \times \varepsilon(x)$ alors $F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1} + (x-x_0)^{n+1}\varepsilon_1(x)$.

Application au calcul du $DL_n(0)$ de la fonction ln : on pose $F(x) = \ln(1+x)$.

Corollaire 6 Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0. Si f admet un $DL_{n+1}(x_0)$ et si f' admet un $DL_n(x_0)$ alors la partie principale du $DL_n(x_0)$ de f' est obtenue en dérivant la partie principale du $DL_{n+1}(x_0)$ de f.

Dém : on applique le théorème précédent à f'

ATTENTION : f a un $DL_{n+1}(0) \not\Rightarrow f'$ a un $DL_n(0)$

Exemple : étudier la fonction $f(x) = x^2 \times \sin(1/x)$

Conclusion sur les calculs de DL Différentes méthodes pour calculer des DL :

1. Appliquer la formule de T.Y.
2. Opérations sur les DL usuels => **Connaître SANS HESITATION les formules usuelles !!!**
3. On dérive la fonction et on intègre le DL de la dérivée (ex : Arctan, $\ln(1+x)$)

VI Relations de comparaison

Définition 5 On considère f, g définies sur un intervalle I et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f et g ne s'annulent en aucun point de I, sauf éventuellement en a.

- On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ (ou encore, éventuellement : $f(x) \underset{x\to a}{\ll} g(x)$) lorsque : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- On dit que la fonction f est *équivalente* à la fonction g au voisinage de a et l'on note $f \underset{a}{\sim} g$, ou bien $f(x) \underset{x\to a}{\sim} (g(x))$ lorsque : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Remarque 5 Si $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)\right)$ avec $a_0 \neq 0$ (forme normalisée du DL), alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$.

VI.1 Résultats importants

1. $\left(f \underset{a}{\sim} g\right) \Leftrightarrow \left(f - g \underset{a}{=} o(g)\right) \Leftrightarrow \left(g - f \underset{a}{=} o(f)\right)$
2. $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*\right) \Leftrightarrow \left(f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell\right)$
3. **si** $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$
4. **si** $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ **alors il existe un voisinage de** a **sur lequel** $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe
5. **si** $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

VI.1.a Quelques règles de calculs

Soient f_1, g_1, h, f_2, g_2 sont des fonctions ne s'annulant en aucun point de $I\backslash\{a\}$. On a

1. **si** $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $g_1 \underset{a}{=} o(g_2)$ **alors** $f_1 \underset{a}{=} o(g_2)$ (*transitivité* : vrai aussi pour $\sim$).
2. **si** $f_1 \underset{a}{=} o(h)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(h)$ **alors**, pour toute constante réelle λ, $f_1 + \lambda f_2 \underset{a}{=} o(h)$.
3. **si** $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} (g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} (g_2(x))$ **alors** $f_1(x) \times f_2(x) \sim (g_1(x) \times g_2(x))$ et $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$.

4. **si** $f_1(x) \underset{x \to a}{\sim} (g_1(x))$ et α est une <u>CONSTANTE</u> réelle **alors** $(f_1(x))^\alpha \underset{x \to a}{\sim} (g_1(x))^\alpha$ (sous réserve d'existence des puissances).
   Attention : ce résultat est faux si $\alpha \neq$ constante : par exemple, calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$

5. ATTENTION : IL EST INTERDIT DE SOMMER DES EQUIVALENTS
   La seule règle applicable pour la somme d'équivalents est :
$$\begin{pmatrix} f_1(x) \underset{x \to a}{\sim} \alpha h(x) \\ f_2(x) \underset{x \to a}{\sim} \beta h(x) \\ \alpha + \beta \neq 0 \text{ (CONSTANTES)} \end{pmatrix} \Rightarrow \Big(f_1(x) + f_2(x) \underset{x \to a}{\sim} (\alpha + \beta) h(x) \Big)$$

VII Comparaisons des fonctions usuelles

CES FORMULES SONT A CONNAITRE SANS LA MOINDRE HESITATION....

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \text{ Autrement dit : } \ln(x) \underset{x \to \infty}{=} o(x)$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = \text{ Autrement dit : } (\ln(x))^\alpha \underset{x \to \infty}{=} o(x^\beta)$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \quad \lim_{x \to 0^+} x^\beta (|\ln(x)|)^\alpha = \text{ Autrement dit : } (|\ln(x))|^\alpha \underset{x \to 0^+}{=} o(\frac{1}{x^\beta})$$

$$\forall a \in]1, +\infty[, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \text{ Autrement dit : } x^\alpha \underset{x \to \infty}{=} o(a^x)$$

$$\forall a \in]1, +\infty[, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to -\infty} a^x |x|^\alpha = \text{ Autrement dit : } a^x \underset{x \to -\infty}{=} o(\frac{1}{|x|^\alpha})$$

Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} n q^n = 0$

$e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$	$\ln(u) \underset{u \to 1}{\sim} u - 1$
$(1+x)^a - 1 \underset{x \to 0}{\sim} ax$ si $a \neq 0$	$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2}x$	$\sinh(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$
$\cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} 1$	$\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$	$\tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$
$1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$	$\arctan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$	$\arcsin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$