Préliminaire : dans ce qui suit, je noterai « APCR »lorqu'une certaine propriété sera vraie éventuellement « à partir d'un certain rang ». **Ce n'est pas une notation standard....**

I Questions pour se mettre en route

1. Donner la définition d'une suite convergente, d'une suite tendant vers l'infini.
2. Une suite convergente est-elle bornée ? Et une suite bornée est-elle convergente ?
3. Que peut-on dire d'une suite extraite d'une suite convergente ? D'une suite extraite d'une suite divergente ? Toute suite a-t-elle une limite ? (justifier la réponse)
4. Enoncer le théorème de convergence par encadrement (ou théorème des gendarmes).
   Enoncer le théorème de passage à la limite dans une inégalité.
   Sont-ils proches ? Quelle différence fondamentale existe-t-il entre ces deux théorèmes ?
5. Conserve-t-on des inégalités strictes par passage à la limite ?
6. Que peut-on dire d'une suite croissante ? D'une suite décroissante ? Enoncer le théorème de la limite monotone.
7. Définition de deux suites adajacentes. Que peut-on dire de deux suites adjacentes ?
8. Quelles notions évoquées précédemment pour les suites réelles s'étendent-elles aux suites complexes ? Enoncer les généralisations. Comment caractériser une suite complexe convergente à l'aide de notions sur les suites réelles ?
9. Opérations sur les suites convergentes/divergentes ?
10. Définition d'une suite arithmétique ; que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$? ; somme des n premiers termes d'une suite arithmétique.
    Définition d'une suite géométrique ; que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$? ; somme des n premiers termes d'une suite géométrique.
    Limite éventuelle d'une suite géométrique.
11. Définition d'une suite arithmético-géométrique. Que peut-on en dire ? Même question pour une suite satisfaisant une récurrence linéaire d'ordre 2 (au fait : qu'est-ce que c'est ? ?)
    - Etudier la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$.
    - Etudier la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = 4$.
    - Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :
      i. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, et pour tout entier $n \geq 0$: $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
      ii. $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout entier $n \geq 0$: $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.
      iii. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et pour tout entier $n \geq 0$: $\dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n}$.
      iv. $u_0 > 0$, $u_1 > 0$, et pour tout entier $n \geq 0$: $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^5}{u_n^6}$.
12. On considère une suite définie par : u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que f est continue sur I et que $u_0 \in I$.
    - Quelle hypothèse supplémentaire faire sur f afin d'être sûr que la suite sera bien définie ?
    - Que ferez-vous avant toute chose, afin d'avoir une idée de l'évolution de u_n ?
    - Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$, que peut-on dire de ℓ ?
    - CONSEIL : voir le paragraphe IV.5 page 4
13. définition de deux suites équivalentes. Quelles opérations peut-on faire sur les équivalents ? (Multiplication ? Division ? Addition ? Composition par une fonction ? Par ln ? Par $\sqrt{}$? Par exp ?) Quels équivalents usuels connaissez-vous ?
14. Mêmes questions pour "suite négligeable devant une autre".
15. Quels développements limités connaissez-vous ?

II Limites de suites réelles

II.1 Introduction

Définition 1 Une suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$
Une suite (u_n) tend vers (ou "diverge vers") $+\infty$ lorsque : $\forall A > 0$, $\exists N$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow u_n > A$.
Une suite (u_n) tend vers (ou "diverge vers") $-\infty$ lorsque : $\forall A > 0$, $\exists N$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow u_n < -A$.

Proposition 1 Toute suite convergente est bornée. Attention : la réciproque est fausse.

Proposition 2 Si $\lim u_n = \ell$ et $\ell > 0$, alors $\exists n_0$ tel que : $n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > \ell/2 > 0$

Proposition 3 Si une suite (u_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite $(u_{\phi(n)}$ extraite de (u_n) tend aussi vers ℓ.

Corollaire 1 Si on trouve deux suites extraites de (u_n) qui ont des limites différentes, alors (u_n) n'a pas de limite.

Proposition 4 Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors (u_n) tend vers ℓ.

II.2 Inégalités

Théorème 1 Th. de majoration. Si $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$ APCR (où $\ell \in \mathbb{R}$) et $\lim \alpha_n = 0$, alors $\lim u_n = \ell$.

Théorème 2 Th. de convergence par encadrement. Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ APCR et $\lim u_n = \lim w_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors (v_n) converge et $\lim v_n = \ell$.

Théorème 3 Th. de convergence par majoration ou par minoration.
Si $u_n \leqslant v_n$ APCR et $\lim u_n = +\infty$ alors $\lim v_n = +\infty$.
Si $u_n \leqslant v_n$ APCR et $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim u_n = -\infty$.

Remarque 1 Les trois théorèmes ci-dessus *nous donnent* $\boxed{\text{l'existence}}$ de la limite d'une suite ainsi que sa valeur. Dans le théorème ci-dessous, faire bien attention que la convergence de (u_n) fait partie des *hypothèses*. On fera très attention à ne pas confondre « existence d'une limite par encadrement (ou comparaison) »et « passage à la limite dans une inégalité ».

Théorème 4 Th. de stabilité des inégalités larges par passage à la limite.
Si $u_n \leqslant v_n$ APCR et $\lim u_n = \ell_1$ et $\lim v_n = \ell_2$ alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Remarque 2 On ne conserve jamais d'inégalités strictes par passage à la limite.
Si $u_n < v_n$ APCR et $\lim u_n = \ell_1,\ \lim v_n = \ell_2$, on peut dire que $\ell_1 \leqslant \ell_2$; on ne peut en aucun cas affirmer que $\ell_1 < \ell_2$.

II.3 Suites monotones

Théorème 5 Th. de la limite monotone.
Si (u_n) est croissante majorée, alors elle converge vers $\sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
Si (u_n) est décroissante minorée, alors elle converge vers $\inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Corollaire 2 Une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée.
Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Une suite décroissante converge si et seulement si elle est minorée.
Une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Suites adjacentes

Définition 2 Lorsque (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim(u_n - v_n) = 0$, on dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Théorème 6 Théorème des suites adjacentes
Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes et de plus elles ont la même limite.
De plus, si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim(u_n - v_n) = 0$, alors leur limite commune ℓ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

Remarque 3 Si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim(u_n - v_n) = 0$, alors : $|u_n - \ell| \leqslant |v_n - u_n| = v_n - u_n$.
Cette remarque permet de contrôler l'erreur commise en prenant u_n ou v_n comme valeur approchée de ℓ.

II.4 Opérations sur les limites

A REVOIR...

III Suites complexes

Définition 3 Soit (u_n) une suite à valeurs complexes : $\overline{u_n} = a_n + ib_n$ où (a_n) et (b_n) sont des suites à valeurs réelles.
On note alors $\text{Re}(u_n) = (a_n)$ et $\text{Im}(u_n) = (b_n)$ et enfin $\overline{(u_n)} = (a_n - ib_n)$.
On dit que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ lorsque : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$.
On dit que (u_n) est bornée lorsque $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$.

Proposition 5 Caractérisation des suites convergentes à l'aide des parties réelles et imaginaires.
La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si $\text{Re}(u_n)$ converge vers $\text{Re}(\ell)$ et $\text{Im}(u_n)$ converge vers $\text{Im}(\ell)$.

Proposition 6 Si une suite à valeurs complexes est convergente, alors elle est bornée.

Proposition 7 Toute combinaison linéaire de suites complexes convergentes est elle même une suite convergente.
De plus, la limite est alors la combinaison linéaire des limites.
Si $\lim u_n = Z_1$ et $\lim v_n = Z_2$, alors $\lim u_n v_n = Z_1 Z_2$. Et si de plus $Z_2 \neq 0$, alors $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{Z_1}{Z_2}$.

IV Suites usuelles

IV.1 Les suites arithmétiques

Soit r, une **constante** fixée. Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\geq 0}$ est dite **arithmétique de raison** r si elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n + r$.
Expressions : on montre (à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n) :
pour tout entier $n \geq 0,\quad u_n = u_0 + n \times r$ et pour $n \geq n_0$: $u_n = u_{n_0} + (n - n_0) \times r$.
Somme des termes d'une suite arithmétique : $\forall n \geq 0,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k$

et $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 + r\dfrac{n(n+1)}{2}$

Dans le même ordre d'idées, il est bon de connaître les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

IV.2 Les suites géométriques

Soit q, une **constante** fixée. Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\geq 0}$ est dite **géométrique de raison** q si elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = q \times u_n$.
Expressions : on montre (à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n) :
pour tout entier $n \geq 0,\quad u_n = q^n \times u_0$ et pour $n \geq n_0,\quad u_n = q^{n-n_0} \times u_{n_0}$.
Sommes : on montre

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} (n+1) & \text{si} \quad q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \end{cases}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times (1 + q + \cdots + q^n) =$

Rappels sur les limites : si q est une **CONSTANTE RÉELLE**, alors

$$\lim_{n\to+\infty} (q^n) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad q > 1 \quad \text{(i.e)} \quad q \in]1, +\infty[\\ 1 & \text{si} \quad q = 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < q < 1 \quad \text{(i.e)} \quad q \in]-1, +1[\quad \text{(i.e)} \quad |q| < 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si} \quad q \leq -1 \quad \text{(i.e)} \quad q \in]-\infty, -1] \end{cases}$$

Remarque : pour tout $q \in \mathbb{C}^*$, $q^0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0^n = 0$. Par convention, on pose, pour nos formules, $0^0 = 1$ (examiner le cas d'une suite géométrique de raison nulle).
Par ailleurs, si $q \in \mathbb{C}$, alors $\lim q^n = 0$ **si et seulement si** $|q| < 1$.

IV.3 Les suites arithmético-géométriques

On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\geq 0}$ est **arithmético-géométrique** s'il existe deux CONSTANTES a et b telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = au_n + b$

Méthode d'étude :

- Si $a = 1$: alors $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique. Si $b = 0$, c'est une suite géométrique....
- Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$: on résout l'équation $L = aL + b$.
  Puisque $a \neq 1$, on trouve une et une seule solution : $L = \dfrac{b}{1-a}$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on fait la différence des égalités $u_{n+1} = au_n + b$ et $L = aL + b$: on en tire (par soustraction) la nouvelle égalité $u_{n+1} - L = a(u_n - L)$.
  Il est donc judicieux de définir une nouvelle suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\geq 0}$ par : pour tout $n \geq 0$, $v_n = u_n - L$.
  Ainsi, cette suite vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = av_n$, elle est donc géométrique, de raison a.
  On en tire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = a^n v_0$ autrement dit $u_n - L = a^n(u_0 - L)$ puis finalement $u_n = a^n(u_0 - L) + L$.
  Remarque : si $a = 0$, alors $u_1 = u_2 = \cdots = b = L$, la suite est stationnaire (constante à partir du rang 1), et ceci pour toute valeur de u_0 et de b. Avec la convention $0^0 = 1$, la formule précédente est valable aussi dans ce cas.

IV.4 Suites récurrentes linéaires doubles

On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\geq 0}$ est une **suite récurrente linéaire double** (ou « d'ordre 2 »)s'il existe trois constantes complexes a, b et c avec $a \neq 0$, (i.e) $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.
Puisque $a \neq 0$, on en tire la relation $u_{n+2} = \frac{-b}{a}u_{n+1} + \frac{-c}{a}u_n$, ce qui permet de calculer un terme de la suite à partir des deux termes de rangs précédents.
Méthode d'étude : on considère l'équation caractéristique associée (E_C) « $aX^2 + bX + c = 0$», de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. On a les résultats suivants :

- si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2 (dans $\mathbb{C}$). Dans ce cas, il existe deux constantes λ_1 et λ_2 (dans $\mathbb{C}$) telles que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda_1(r_1)^n + \lambda_2(r_2)^n$
  On détermine les valeurs de λ_1 et λ_2 grâce à la connaissance des deux premiers termes de la suite, u_0 et u_1.
- si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double r_0 (dans $\mathbb{C}$). Dans ce cas, il existe deux constantes λ_1 et λ_2 (dans $\mathbb{C}$) telles que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda_1 + \lambda_2 n)(r_0)^n$ (i.e) $u_n = \lambda_1(r_0)^n + \lambda_2 n(r_0)^n$.
  On détermine les valeurs de λ_1 et λ_2 grâce à la connaissance des deux premiers termes de la suite, u_0 et u_1.

Cas particulier - suites réelles et $\Delta < 0$: si a, b et c sont des **réels** (avec $a \neq 0$), et si u_0, u_1 sont **réels**, alors la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est à **valeurs réelles** (i.e $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$). L'étude générale faite dans $\mathbb{C}$ est encore valable, sauf que les constantes λ_1 et λ_2 ont, dans ce cas, une contrainte supplémentaire.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$, on a une expression de u_n faisant intervenir des constantes λ_1 et λ_2, et on vérifie sans peine que λ_1 et λ_2 sont réelles en écrivant le système qu'elles vérifient.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: l'équation caractéristique admet **deux racines complexes distinctes et conjuguées** (donc non-réelles) $r_1 = \overline{r_2} = \rho e^{i\theta}$ (ρ et θ réels).
  On prouve qu'il existe deux **constantes réelles** A et B telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \rho^n\left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right)$
  Preuve 1 Il existe alors deux constantes λ_1 et λ_2 complexes et nécessairement conjuguées telles que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda_1(r_1)^n + \lambda_2(r_2)^n$, avec $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Pourquoi λ_1 et λ_2 sont-elles complexes conjuguées ? On écrit : $u_n = \lambda_1(r_1)^n + \lambda_2(r_2)^n$ en remplaçant r_2 par $\overline{r_1} = \rho e^{i\theta}$ (avec $\rho \neq 0$) et on écrit que $u_n \in \mathbb{R}$, c'est à dire : $u_n = \bar{u}_n$. on obtient : $e^{in\theta}(\lambda_1 - \bar{\lambda}_2) = e^{-in\theta}(\lambda_2 - \bar{\lambda}_1)$ ce qui donne ensuite, si $\lambda_1 - \bar{\lambda}_2 \neq 0$: $e^{2in\theta} = \dfrac{\lambda_2 - \bar{\lambda}_1}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2}$ sachant que ceci est valable pour tout θ. C'est absurde, en regardant par exemple $n = 0$ puis $n = 1$. Donc $\lambda_1 - \bar{\lambda}_2 = 0$.
  On a donc : $u_n = \lambda_1(r_1)^n + \overline{\lambda_1}(\overline{r_1})^n = 2\mathrm{Re}\left(\lambda_1(r_1)^n\right)$. Puis, en écrivant $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \overline{r_1} = \rho e^{-i\theta}$, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, on obtient : $\lambda_1(r_1)^n = (\alpha + i\beta)(\rho e^{i\theta})^n = (\alpha + i\beta)\rho^n e^{in\theta} = \rho^n(\alpha + i\beta)\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$ d'où $2\mathrm{Re}\left(\lambda_1(r_1)^n\right) = 2\rho^n(\alpha\cos(n\theta) - \beta\sin(n\theta))$.$\blacksquare$

IV.5 Suites récurrentes définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue**. On veut définir une suite (u_n) par $u_0 \in I$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Il peut arriver que l'énoncé vous « prenne par la main ». Dans ce cas, on se laisse guider. Sinon, voici des grandes lignes auxquelles on peut penser (ou auxquelles l'enoncé vous fera penser, mais vous n'êtes pas censés être surpris par la démarche classique).

1. On étudie f et on trace son graphe Γ sur I. On trace sur le même schéma la première bissectrice Δ (d'équation $y = f(x)$) et les premiers termes de la suite (même si un dessin ne peut jamais tenir lieu de démonstration, c'est bien utile, en particulier pour savoir laquelle des méthodes exposées ci-dessous pourra être la plus fructueuse). Afin de positionner Γ et Δ l'une par rapport à l'autre, on est amené à résoudre l'équation "$f(x) = x$". Si l'on peut, on étudie le signe de $f(x) - x$.

2. Il faut **vérifier que la suite (u_n) est bien définie.**
   Si f est définie sur $\mathbb{R}$, l'existence de la suite (u_n) ne pose aucun problème!! (mais il faut le mentionner)

   Proposition 8 Si $f(I) \subset I$ alors la suite (u_n) est bien définie et de plus : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

   Donc, généralement, on cherche les intervalles de stabilité de f c'est à dire, on cherche I tel que $f(I) \subset I$.
   Remarquons que si $I = [a, b]$ et $f(I) \subset I$, avec a et b réels, alors la suite (u_n) est bornée.
3. Résultat à connaître : Recherche des **limites possibles** de la suite (u_n).

   Théorème 7 : On suppose que :
   — $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction **continue**
   — (u_n) est définie par (u_0) et par la relation "$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$".
   Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors sa limite ℓ est un point fixe de f, c'est à dire vérifie $f(\ell) = \ell$.

4. Si l'on a trouvé un point fixe ℓ de f, **on peut essayer d'utiliser l'inégalité des accroissements finis**. En effet, si $|f'| \leqslant r < 1$ (f contractante) sur I, alors on peut montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant r\,|u_n - \ell|$ puis on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant r^n |u_0 - \ell|$ et l'on peut en déduire que (u_n) tend vers ℓ.
5. Autre approche : étude de la **monotonie de la suite** (u_n).
   (a) Si f est croissante sur I où $f(I) \subset I$, alors la suite (u_n) est monotone. Plus précisément, si $u_0 \leq u_1$ alors (u_n) est croissante. Si $u_0 \geq u_1$ alors (u_n) est décroissante. On le montre par récurrence.
   On est donc naturellement amené à étudier le signe de $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$ (ce qui revient à étudier le signe de $f(x) - x$ avec $x = u_0$).
   N.B. : A ce stade, si $I = [a, b]$ et f croissante, on peut en déduire que (u_n) est convergente vers une limite ℓ satisfaisant $f(\ell) = \ell$.
   (b) Si f est décroissante sur I et $f(I) \subset I$, alors $f \circ f$ est croissante. On étudie alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Pour étudier (u_{2n}) et (u_{2n+1}) on peut procéder comme au 5a.
   En effet : $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ avec $f \circ f$ croissante. La suite (u_{2n}) est donc monotone. La suite (u_{2n+1}) est aussi monotone, mais de monotonie contraire à celle de (u_{2n}) car, f étant décroissante, et $u_{2n},\ u_{2n+2}$ étant dans I, on a : $u_{2n} \leq u_{2n+2} \Rightarrow f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}) \iff u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$.
   A ce stade, on peut par exemple : étudier si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, ou bien chercher leurs limites respectives et les comparer ou bien... se laisser guider par les indications de l'énoncé. Leurs limites éventuelles vérifient l'équation $f \circ f(x) = x$.

V Comparaison de suites

V.1 Suite négligeable devant une autre

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites, et l'on suppose les termes de (v_n) non nuls à partir d'un certain rang.
On dit que la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est **négligeable** devant la suite $v = (v_n)_{n\geq 0}$ lorsque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$
On dit aussi
« la suite (u_n) est *infiniment petite* devant la suite (v_n) », ou encore
« la suite (v_n) est *prépondérante* devant la suite (u_n) », ou encore
« la suite (v_n) est *infiniment grande* devant la suite (u_n) ».
Nota Bene : Autrement dit : ($u_n = o(v_n)$) $\Leftrightarrow$ ($\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [\, n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon \times |v_n| \,]$).

V.2 Exemples usuels à connaître

Si q est une **constante positive** alors $\ln(n) = o(n^q)$ et $q^n = o(n!)$
Si q est une **constante positive** et si a est une **constante vérifiant** $a > 1$ alors $n^q = o(a^n)$ et $a^n = o(n!)$
Si a et b sont des **constantes** vérifiant $a < b$ alors : $n^a = o(n^b)$ et $\dfrac{1}{n^b} = o(\dfrac{1}{n^a})$.
Si, en plus, $0 < a < b$ alors : $a^n = o(b^n)$ et $\left(\dfrac{1}{b}\right)^n = o(\left(\dfrac{1}{a}\right)^n)$.
Exemples en vrac : $e^{-n} = o(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n)$ et $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = o(\dfrac{1}{n})$ et $\dfrac{1}{n} = o(\dfrac{1}{\ln n})$ et $\dfrac{1}{\ln n} = o(1)$ et $1 = o(\ln(n))$ et $\ln(n) = o(n^{\frac{1}{3}})$
$n^{\frac{1}{3}} = o(\sqrt{n})$ et $\sqrt{n} = o(n)$ et $n = o(n^2)$ et $n^2 = o(n^{10})$ et $n^{10} = o(\left(\dfrac{3}{2}\right)^n)$ et $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = o(2^n)$ et $2^n = o(n!)$

V.3 Suites équivalentes

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites non-nulles à partir d'un certain rang. On dit que la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est **équivalente** à la suite $v = (v_n)_{n\geq 0}$ si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ et on note alors : $u_n \sim v_n$.
Remarquons que : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow v_n \sim u_n$.

Proposition 9 Résultats importants

1. $(u_n \sim v_n) \Leftrightarrow (u_n - v_n = o(v_n)) \Leftrightarrow (v_n - u_n = o(u_n))$
   De manière équivalente, $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + w_n$ avec $w_n = o(v_n)$.

   Si $u_n = v_n + w_n$ avec $w_n = o(v_n)$, on écrit $u_n = v_n + o(v_n)$.
2. Si $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors : $\left(\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \ell\right) \Leftrightarrow (u_n \sim \ell)$
3. **si** $u_n \sim v_n$ `et` $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \ell$
4. `si` $u_n \sim v_n$ **alors** u_n `et` v_n ont le même signe à partir d'un certain rang

Proposition 10 Quelques règles de calculs Soient (u_n), (v_n), (w_n), (a_n), (b_n) des suites non-nulles APCR.

1. **si** $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(a_n)$ **alors**, pour toute constante réelle λ, $u_n + \lambda v_n = o(a_n)$.
2. **si** $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ **alors** $u_n = o(w_n)$ (*transitivité* : vrai aussi pour $\sim$).
3. **si** $u_n = o(v_n)$ **alors** $u_n + v_n \sim v_n$.
4. **si** $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$ **alors** $u_n \times v_n \sim a_n \times b_n$ et $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{a_n}{b_n}$.
5. **ATTENTION** : il est interdit de sommer des équivalents ou de les composer par une fonction !!! La seule règle applicable pour la somme d'équivalents est :
   si $u_n \sim \alpha a_n$ et $v_n \sim \beta a_n$ avec $\alpha + \beta \neq 0$ (CONSTANTES) **alors** $u_n + v_n \sim (\alpha+\beta)a_n$.
   Il est en particulier **interdit de composer des équivalents par la fonction exponentielle** !!!

Proposition 11 Composition par $\sqrt{}$ et par $\ln$ et équivalents à connaître
Soient u_n et v_n deux suites réelles à termes strictement positifs.

1. Si $u_n \sim v_n$ alors $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$
2. Si $u_n \sim v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
3. Si $u_n \sim v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, alors $\ln(u_n) \sim (u_n - 1)$ (souvent oublié, mais **important !**)
5. Soit (u_n) une suite telle que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$. Alors :

   (a) $\sin(u_n) \sim u_n$ (b) $\tan(u_n) \sim u_n$ (c) $\ln(1+u_n) \sim u_n$ (d) $e^{u_n} - 1 \sim u_n$

   (e) $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$ (f) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ (g) $\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \dfrac{1}{2}u_n$

VI Pratique de l'étude d'une suite réelle

Vous trouverez ci-après les principales méthodes pratiques pour étudier des problèmes de convergence et de limites de suites. N'oubliez pas de vous poser la question du domaine de définition de la suite.
Evidemment, tout ce qui suit s'applique dans le cas où l'on n'a pas reconnu une des suites classiques mentionnées précédemment.

VI.1 Bien réfléchir à la question posée

— Faut-il seulement prouver la convergence ou la divergence d'une suite ?
— Faut-il calculer la limite d'une suite que l'on sait convergente ?
— Faut-il prouver la convergence vers un α déjà connu ? (il est alors plus facile de prouver que $u_n - \alpha$ tend vers 0)
— Faut-il prouver qu'une suite diverge et admet une limite $+\infty$ ou $-\infty$?
— Faut-il prouver qu'une suite converge ET calculer sa limite ?

VI.2 Bien rédiger la question

— Il est toujours possible de « rouler »un examinateur en rédigeant mal et approximativement, mais c'est très rare...
— Il vaut toujours mieux être précis sur ce que vous avez fait et ne pas hésiter à rédiger dans une copie « je n'ai pas su prouver la convergence, mais SI la suite converge, alors voici ma démonstration pour le calcul de la limite »...
— Citez clairement l'énoncé du théorème utilisé.

VI.3 Prouver une convergence

En général, si le sujet demande uniquement de montrer qu'une suite converge, il ne faut surtout pas chercher à calculer la limite. Les méthodes de base sont :
— Suite croissante majorée ou décroissante minorée
— Si on a deux suites, se demander si elles sont adjacentes
— (5/2) Passez aux séries : la suite (u_n) converge $\Leftrightarrow \sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

VI.4 Prouver une divergence

N'oubliez pas qu'une suite diverge soit parce que sa limite est $\pm\infty$, soit parce qu'elle n'a pas de limite.
— Pour prouver une limite infinie, voir plus bas
— Pour prouver qu'il n'y a pas de limite :

- Trouver deux suites extraites qui ont des limites différentes.
- Trouver une suite extraite divergente de façon évidente (rare)
- Travailler par l'absurde : SI la suite convergeait, alors....

VI.5 Calculer une limite infinie

— Utiliser les règles de calcul sur les sommes, produits, inverses de suites.
— Pour prouver que $\lim u_n = +\infty$, on peut chercher une suite $v_n \leqslant u_n$ tendant vers $+\infty$
— Utiliser les théorèmes sur les équivalents pour trouver un équivalent de limite infinie
— Utiliser un développement limité pour trouver un équivalent
— Montrer que la suite est croissante non majorée
— Montrer que la suite est croisante et non convergente

VI.6 Pour prouver une convergence et calculer une limite

Vous ne savez pas que la suite converge. Il est donc interdit de commencer l'étude (et donc la rédaction) en parlant de $\lim u_n$. N'oubliez pas qu'il est parfois plus simple de décomposer le problème en deux étapes : je prouve la convergence et ensuite, sachant que la suite converge, je calcule sa limite.
— Utiliser les règles de calcul sur les sommes, produits, inverses de suites.
— Utiliser les théorèmes sur les équivalents pour trouver un équivalent de limite finie
— Utiliser un développement limité pour trouver un équivalent
— Utiliser un encadrement entre deux suites convergentes et de même limite.
— Cas particulier : Pour prouver qu'une suite (u_n) tend vers 0, majorer $|u_n|$ par une suite v_n plus simple et tendant vers 0
— Revenir à la définition et aux quantificateurs... (en tout dernier recours...)

Un petit quizz

Etudier les propositions suivantes. Démontrer si possible celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour les autres. Toutes les suites mentionneées sont réelles.

1. Une suite de réels positifs qui tend vers 0 est décroissante.
2. Une suite décroissante de réels positifs tend nécessairement vers 0.
3. De toute suite de réels positifs qui tend vers 0, on peut extraire une suite décroissante qui tend vers 0.
4. Si il existe $a > 0$ tel qu'à partir d'un certaint rang, on ait $u_n \geqslant a$, et si (v_n) diverge vers $+\infty$, alors $(u_n v_n)$ diverge vers $+\infty$.
5. Si (u_n) et (v_n) converge vers la même limite ℓ, alors $u_n \sim v_n$.
6. Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (u_n) est croissante.
7. Si (u_n) diverge vers $+\infty$ et si (v_n) est une suite de réels positifs qui ne tend pas vers 0, alors on peut extraire de $(u_n v_n)$ une suite qui diverge vers $+\infty$.
8. Si (u_n) est une suite de réels strictements positifs telle que $\displaystyle\lim_{+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors (u_n) converge vers 0.
9. Toute suite convergente est croissante ou décroissante.
10. Toute suite majorée est croissante.
11. Toute suite croissante est majorée.
12. Le produit de deux suites croissantes est une suite croissante.
13. Si (u_n) converge, alors $({u_n}^2)$ également.
14. Si $({u_n}^2)$ converge, alors (u_n) également.
15. Toute suite non majorée tend vers $+\infty$.
16. Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
17. Une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
18. Si (u_n) est croissante et $\lim \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1$ alors (u_n) est convergente.
19. Si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante et $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ alors (u_n) et (v_n) convergent.
20. Si $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$ alors (u_n) est convergente.
21. Si (u_n) est croissante et si $u_n \leq n$ alors (u_n) est convergente.
22. Si (u_n) converge et si $1 < u_n < 2$ alors $1 < \lim u_n < 2$.
23. Si $1 < u_n < 2$ alors $1 \leq \lim u_n \leq 2$.
24. Si $0 \leq u_n \leq 1$ et $0 \leq v_n \leq 1$ et si $(u_n \times v_n)$ converge, alors (u_n) et (v_n) convergent.
25. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
26. Si $(u_n + v_n)$ diverge, alors (u_n) et (v_n) divergent.
27. Si $(u_n + v_n)$ diverge, alors (u_n) ou (v_n) diverge(nt).
28. Si $\lim u_n = +\infty$ alors (u_n) possède une suite extraite croissante.
29. Si u est extraite de v et si v est extraite de w alors u est extraite de w.
30. Si (u_n) admet deux suites extraites distinctes qui convergent vers la même limite, alors (u_n) converge.
31. Si $\lim u_{2n} = L$ et $\lim u_{2n+1} = L'$ alors $L = L'$.