* **Exercice 1** Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que : si $\ell < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   Montrer que : si $\ell > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   Peut-on conclure si $\ell = 1$?
2. Appliquer ces résultats aux exemples qui suivent :
   $u_n = \frac{a^n}{n!}$ avec $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $v_n = \frac{n^n}{n!}$, $w_n = \frac{a^n}{n^p}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ et $p \in \mathbb{N}$.

♡ * **Exercice 2** Montrer que les deux suites $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ et $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ convergent vers une limite commune. En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

♡ * **Exercice 3** Déterminer les limites des suites définies par :

1. $u_n = \ln(\mathrm{ch}(n)) - n$
2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$ (penser aux sommes de Riemann)
3. $u_n = \left(2a^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n$
4. $u_n = \left(\frac{\arctan(n+1)}{\arctan(n)}\right)^{n^2}$.
   Indication : Penser que, pour $x > 0$, on a Arctan(x)+Arctan$(1/x)$=...

***Exercice 4** Donner un équivalent simple des suites suivantes : $u_n = \ln(n+\sqrt{n^2+1})$, $v_n = \sin\left(\frac{(n^2+n+1)\pi}{n+1}\right)$

♡ ** **Exercice 5** Donner les limites des suites suivantes :

1. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ et $J_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$.
2. $v_n = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x+n}dx$ et $w_n = \int_0^\pi \frac{n\sin(x)}{x+n}dx$

** **Exercice 6** Montrer que $\sum_{k=1}^{n} e^{k^2} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{n^2}$.

Suites récurrentes

* **Exercice 7** Etudier la suite définie par $u_0 \in [0, 2\pi]$ et $u_{n+1} = u_n + \sin(u_n)$.

* **Exercice 8** Etudier la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$.

Suites définies de manière implicite

♡** **Exercice 9** Pour $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrez que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution x_n dans l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Montrez que : $\forall n \geq 1$, on a $x_n < 1$.
3. Calculer $f_{n+1}(x_n)$. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Conclure sur la convergence éventuelle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $\lim x_n = 1$.
5. Dans la suite de l'exercice, on note $\alpha_n = 1 - x_n$.
   (a) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1-\alpha_n)}{\alpha_n} = -1$. Puis montrer que : $n\alpha_n \sim -\ln(\alpha_n)$.
   (b) Quelle est la limite de $-\ln(\alpha_n)$? En déduire enfin que : $-\ln(n) \sim \ln(\alpha_n)$, puis un équivalent simple de α_n.

♡** **Exercice 10** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction ϕ_n définie pour $x \in [n\pi, n\pi + \pi/2[$ par : $\phi_n(x) = \tan(x) - x$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in [n\pi, n\pi + \pi/2[$ tel que $\tan(x_n) = x_n$. (Indication : pour tout n, on pourra étudier les variations de ϕ_n)
2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
3. On pose $v_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n$. Calculer $\tan(v_n)$. En déduire que $v_n = \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$ et que $v_n \sim \frac{1}{n\pi}$, puis que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercices d'oral

Exercice 11

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 12 Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

Exercice 13 Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.