Lycée Aristide Briand
PC, 2024/2025

Programme de colle. Semaine n°1.
Du lundi 16 septembre au vendredi 20 septembre 2024

NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément. De plus, les démonstrations/exemples du paragraphe "Questions de cours" sont à savoir faire avec aisance.
Attention : les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement, à part quand cela est précisé par la mention « démonstration non exigible » ou « résultat admis ».

Déroulement

La colle comporte cette semaine **cette semaine pour tout le monde** : une question de cours suivie de un ou deux exercices sur les chapitres au programme.
Une question de cours (cf ci-dessous) peut être complétée par des formules ou théorèmes à énoncer précisement.

I : Espaces vectoriels, applications linéaires matrices

Tout le programme de PCSI est à réviser…

II : Compléments d'algèbre linéaire

1) Interpolation de Lagrange

Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$. Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.
La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1.

2) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.
En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$.
Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.

3) Matrices par blocs et sous-espaces stables

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit).
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.
Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v.

Questions de cours : démonstration ou exemples à savoir traiter.

- Dimension d'un produit cartésien de 2 espaces vectoriels de dimension finie.
- Somme directe de n sous-espaces vectoriels : caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.
- Dimension d'une somme de 2 sous-espaces vectoriels.
- Base adaptée à la décomposition d'un espace E en somme directe de sous-espaces vectoriels.
- Polynomes de Lagrange : Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.
- Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.
- Sous espaces stables et matrices diagonales par blocs (démonstration dans le cas de deux sous-espaces vectoriels)