Révisions et compléments sur les séries (numériques)

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Table des matières

I Rappels **1**
- I.1 Généralités . . . 1
- I.2 Séries particulières . . . 3
- I.3 Séries à termes réels positifs . . . 3
- I.4 Technique de comparaison série-intégrale . . . 4
- I.5 Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables . . . 5

II Compléments sur les séries à termes réels **6**
- II.1 Séries alternées . . . 6
- II.2 Règle de D'Alembert . . . 6
- II.3 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. . . . 7

III Approfondissements **7**
- III.1 Utilisation des développements limités . . . 7
- III.2 Utilisation de séries téléscopiques pour étudier des suites . . . 7
- III.3 Comparaison avec une série de Riemann ou « règle du $n^\alpha u_n$ » . . . 8

IV BILAN DES OUTILS **9**

I Rappels

I.1 Généralités

Définition 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et soit (S_n) la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
Le couple $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est appelée « série de terme général u_n ».
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **suite des sommes partielles de la série**.
u_n est le « terme général »de la série.
La série est notée : $\sum u_n$ (ou parfois $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$).
Le réel $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelé **somme partielle de rang** n de la série $\sum u_n$.
On dit que la série $\sum u_n$ **converge** (ou : **est convergente**) lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série **diverge** (ou : **est divergente**).

Etudier la **nature de la série**, c'est dire si elle est convergente ou divergente.
On dit que deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou bien toutes les deux divergentes.

Définition 2 Somme et restes d'une série convergente.

Soit $\sum u_n$ une série convergente et soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

La limite $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée **somme de la série** et notée $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

On appelle **reste (partiel) d'ordre** n de la série $\sum u_n$ le réel $R_n = S - S_n$. Ainsi : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Proposition 1 Soit $\sum u_k$ une série **convergente** de somme S et soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Alors :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$.
- $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$: « la suite des restes partiels d'ordre n tend vers 0 ».Ceci s'écrit : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = 0$

Remarque 1 Il arrive que u_n ne soit défini qu'à partir d'un certain rang n_0, et dans ce cas, on note la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ et en cas de convergence, la somme de la série est $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$

Par exemple, on peut considérer $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ et on peut démontrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Remarque 2 La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et si $n_1 > n_0$ alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_1} u_n$ sont de même nature.

Par ailleurs, si $a_n = b_n$ pour $n \geq N$, alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature. Mais si elles convergent, leurs sommes ne sont pas nécessairement égales !

Remarque 3 Si $\sum u_n$ est une série à terme complexes, la convergence de $\sum u_n$ équivaut à la convergence des séries $\sum \mathrm{Re}(u_n))$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n))$

Remarque 4 Soit $\sum u_n$ une série et S_n la somme partielle de rang n. Alors $u_n =$

Proposition 2 Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim u_n = 0$.

Par contraposition : si (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge.

Définition 3 Si $u_n \not\to 0$, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement.**

***Exemple* 1** Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2}{2(n-2)(n+1)}$.

<u>**ATTENTION**</u> : en revanche : $u_n \to 0 \not\Rightarrow \sum u_n$ converge !!!

***Exemple* 2** Série harmonique : Pour $u_n = \frac{1}{n}$: $u_n \to 0$, mais $\sum \frac{1}{n}$ diverge

Proposition 3 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries $\boxed{\textbf{convergentes}}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors la série $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

L'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

L'application qui, à une série **convergente**, associe sa somme, est linéaire.

Remarque 5 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.

- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$
- Si $\sum u_n$ <u>et</u> $\sum v_n$ divergent, alors $\sum(u_n + v_n)$

I.2 Séries particulières

Proposition 4 Séries télescopiques. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite à valeurs réelles ou complexes.
Alors la **série** $\displaystyle\sum_{n\geq n_0}(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la **suite** $(u_n)_n$ converge.

Théorème 1 Séries géométriques.

Si $r \in \mathbb{C}$, la série $\sum r^n$ **converge** si et seulement si : $\boxed{|r| < 1.}$ Dans ce cas, on a $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}}$.

Remarque 6

- Attention : confusion courante entre les conditions $|x| < 1$ et $x \neq 1$.
- Pour tout $x \neq 1$, la somme partielle de la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$ vaut : $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
- Sous la condition $|x| < 1$ on a par exemple $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ ou plus généralement : $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{n_0}}{1-x}$.
- Si $|x| < 1$, le reste d'ordre n de la série géométrique de terme général x^n vaut : $\displaystyle R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$
- Application classique : calcul de sommes faisant intervenir des cosinus ou des sinus.
  Exemple : Montrer que $\displaystyle\sum \frac{\cos(n)}{2^n}$ est une série convergente et calculer sa somme.

Proposition 5 (Série exponentielle) Soit $z \in \mathbb{C}$
La série $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et sa somme vaut : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$

Remarque 7 Rappeler comment est défini e^z pour $z \in \mathbb{C}$.
Rappeler l'idée de la démonstration.

I.3 Séries à termes réels positifs

Définition 4 On dit que $\sum u_n$ est une série à termes réels positifs si le terme général de $\sum u_n$ est réel positif, c'est à dire si : $\forall n \geq n_0,\ u_n \in \mathbb{R}^+$.

Théorème 2 Soit $\sum u_n$ une série à termes $\boxed{\text{positifs}}$. Soit $\displaystyle S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$. Alors :

- (S_n) est croissante.
- $\sum u_n$ converge si et seulement si (S_n) est majorée. Dans ce cas : $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sup\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
- $\sum u_n$ diverge si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On peut alors noter $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = +\infty$
- Dans tous les cas : $\displaystyle(\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n) \Longrightarrow \left(0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$

N.B. : On peut adapter le 3 premiers items de ce théorème au cas où la série est à termes réels mais positifs à partir d'un certain rang seulement, c'est à dire si : $\exists p \geq n_0 | \ \forall n \geq p, \ u_n \in \mathbb{R}^+$. Dans ce cas, (S_n) est seulement croissante à partir d'un certain rang...

Théorème 3 Comparaison des séries à termes $\boxed{\text{positifs}}$ à l'aide d'inégalités.
Soient (u_n) et (v_n) des suites de nombres réels positifs telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq u_n \leq v_n$. Alors :

$$\left(\sum v_n \text{ converge }\right) \Rightarrow \left(\sum u_n \text{ converge } v_n\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\sum u_n \text{ diverge }\right) \Rightarrow \left(\sum v_n \text{ diverge }\right)$$

Remarque 8 Les résultats concernant la **nature** des séries restent valable si on a seulement $0 \leq u_n \leq v_n$ **à partir d'un certain rang**.

Théorème 4 Comparaison des séries à termes $\boxed{\text{positifs}}$ à l'aide d'équivalents.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres **réels positifs** telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarque 9
- Il suffit en fait qu'une des deux séries soit à termes positifs, car si elles sont équivalentes, à partir d'un certain rang, elle seront de même signe.
- Le critère d'équivalence reste valable si les deux séries sont à termes négatifs. **Mais le résultat est faux si les termes généraux des séries ne sont pas de signe constant.**

***Exemple* 3** On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$.
Vérifier que $u_n \sim v_n$. Quelle est la nature de chaque série ?

I.4 Technique de comparaison série-intégrale

Cette technique permet d'établir des convergences et des divergences de séries, d'estimer des sommes partielles de séries divergentes dans le cas d'une fonction monotone.

Théorème 5 Séries de Riemann.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ **converge** si et seulement si $\boxed{\alpha > 1.}$

Remarque 10 Résultats classiques : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ (Voir plus loin exemple 4)

Proposition 6 (Exercice) Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ (avec $a > 0$) une fonction continue, positive et décroissante ; Alors la série $\sum f(n)$ et la suite $(\displaystyle\int_a^n f(t)dt)$ sont de même nature

***Exemple* 4** Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.
2. En déduire que $\forall n \geq 2, \ \ln(n) \leq S_n \leq 1 + \ln(n)$.
3. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

***Exemple* 5** Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction **positive, continue et décroissante** sur $[n_0, +\infty[$.

- Montrer que : si $\sum f(n)$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt$.
- Donner un équivalent des sommes partielles de Riemann $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha \in]0,1]$.
- Donner un équivalent des restes partiels de Riemann $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.
- Montrer que : si $\sum f(n)$ converge, alors $R_n = \displaystyle\sum_{n+1}^{+\infty} f(k)$ n'est pas forcément équivalent à $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)dt$. (Penser aux séries géométriques)
- On considère la série de terme général $a_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ où $\alpha > 1$. Etudier la nature de la série $\sum a_n$.

I.5 Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables

Définition 5 (Séries absolument convergentes, suites sommables)
On dit que la **série** $\sum u_n$ **est absolument convergente** ou **converge absolument** lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.
On dit aussi que la **suite** (u_n) est sommable.
Notation : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$

Remarque 11 Si $u_n > 0$ pour tout n, alors : $(\sum u_n$ converge$) \Rightarrow (\sum u_n$ converge absolument$)$
***Exemple* 6** Donner un exemple de série convergente mais pas absolument convergente.

Théorème 6 Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.
De plus, dans ce cas : $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Preuve On suppose que $\sum u_n$ est absolument convergente.
1er cas : $u_n \in \mathbb{R}$. On sait que $-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$ donc $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$. Donc si on pose $v_n = u_n + |u_n|$, c'est le terme général d'une série à termes positifs, majoré par le terme général $2|u_n|$ d'une série convergente à termes positifs, donc $\sum(u_n + |u_n|)$ converge. Or $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum((u_n + |u_n|) - |u_n|) = \sum u_n$ converge.
2e cas : $u_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$. On sait que $0 \leq |a_n| = \sqrt{a_n^2} \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |u_n|$. Or on a supposé que $\sum |u_n|$ converge. Donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |a_n|$ converge, c'est à dire que $\sum a_n$ est absolument convergente. D'après le 1er cas étudié, on en déduit que $\sum a_n$ converge. De la même manière, $\sum b_n$ converge. Donc $\sum u_n$ converge (cf Remarque 3).
On a montré que : $\left(\sum |u_n| \text{ converge}\right) \Rightarrow \left(\sum u_n \text{ converge}\right)$**.**

On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |u_k|$. On a alors pour tout n : $|S_n| \leq S'_n \quad (*)$.
D'après les hypothèses, (S'_n) converge, et d'après ce qui précède on en déduit que (S_n) converge. On peut donc passer à la limite dans l'inégalité $(*)$. CQFD

ATTENTION : d'après l'exemple 6 ci-dessus, la réciproque est fausse, à savoir :

$$\left(\sum u_n \text{ converge}\right) \quad \not\Rightarrow \quad \left(\sum u_n \text{ converge absolument}\right)$$

***Exemple* 7** Montrer que : une combinaison linéaire de séries absolument convergentes est elle-même absolument convergente. Autrement dit, montrer que :
si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\sum(u_n + \lambda v_n)$ est absolument convergente.

Théorème 7 Soit (u_n) une suite complexe, et soit (v_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$.
Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

***Exemple* 8** Soient $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^3}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$. On a $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ln(n)}{n} \to 0$ donc $u_n = o(v_n)$.
Or $\sum v_n$ est absolument convergente (somme de Riemann usuelle). Donc $\sum u_n$ converge.

***Exemple* 9**

1. $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ et $u_n = \dfrac{1}{n}$. Comparer u_n et v_n, et indiquer la nature de $\sum v_n$.
2. Soit $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^3}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$. Comparer u_n et v_n, et indiquer la nature de $\sum u_n$.

II Compléments sur les séries à termes réels

II.1 Séries alternées

Définition 6 Une série à termes réels $\sum u_n$ est dite alternée lorsque, pour tout entier naturel n, u_n et u_{n+1} sont de signes contraires. Cela revient à dire que : $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

Proposition 7 (Critère spécial des séries alternées) Soit $\sum(-1)^n a_n$ une série alternée.
On suppose que (a_n) est une suite positive décroissante et qui tend vers 0.
On note $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Alors :

- La série $\sum(-1)^n a_n$ converge.
- Plus précisément, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
- Le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de son premier terme et lui est inférieur :

  signe(R_n)= $(-1)^{n+1}$ et $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k\right| \leqslant a_{n+1}$

***Exemple* 10** Donner la nature des séries suivantes : $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

II.2 Règle de D'Alembert

Théorème 8 Règle de d'Alembert
On suppose que pour tout $n \neq 0$, $a_n \neq 0$ et que la suite $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ a une limite ℓ (finie ou infinie).

- Si $0 \leq \ell < 1$, la série $\sum a_n$ converge absolument.
- Si $\ell > 1$, la série $\sum a_n$ diverge (grossièrement).
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure sur la nature de la série $\sum a_n$ par cette méthode.

***Exemple* 11** Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{3^n}{\binom{2n}{n}}$?

II.3 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Définition 7 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels ou complexes.
On appelle produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ la séries de terme général c_n où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}.$$

***Exemple* 12** $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ et $b_n = \dfrac{1}{3^n}$. Déterminer c_n.
Comparer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

Théorème 9 Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est une série absolument convergente, et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

***Exemple* 13** Soit x un réel tel que $|x| < 1$. On pose $a_n = b_n = x^n$. Illustrer la proposition précédente avec cet exemple.

***Exemple* 14** On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Justifier que la série de terme général $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2 2^{n-k}}$ converge, puis déterminer sa somme.

III Approfondissements

III.1 Utilisation des développements limités

***Exemple* 15** Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$. On peut remarquer que $|u_n| \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et donc $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.
Un petit calcul de DL donne :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-(1/2)} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Soient $\alpha_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\beta_n = \dfrac{1}{2n\sqrt{n}}$ et $\gamma_n = u_n - \alpha_n - \beta_n = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.
On peut montrer que $\sum \alpha_n$ converge ... Comment le fait-on ? ?
$\sum \beta_n$ est une série de Riemann convergente. Enfin $\sum |\gamma_n|$ est une série convergente d'après le théorème 7. Or toute série absolument convergente est convergente donc $\sum \gamma_n$ converge.
En conclusion : $\sum u_n$ est convergente comme somme de 3 séries convergentes.

III.2 Utilisation de séries téléscopiques pour étudier des suites

Proposition 8 La suite (u_n) converge si et seulement si la serie $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Application : Soit (u_n) une suite réelle. Pour savoir si la suite (u_n) converge, on peut donc introduire la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, puis déterminer à l'aide des outils sur les séries, si $\sum v_n$ est convergente....

***Exemple* 16** : On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. On considère les deux suites $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = h_n - \ln(n)$ et $v_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n$.
Montrer que la série de terme général v_n est convergente. En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$; on note γ sa limite (constante γ d'Euler).

***Exemple* 17** : On pose, pour tout entier $n > 0$, $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^n.\sqrt{n}}$ et $U_n = \ln(\dfrac{a_{n+1}}{a_n})$.

$a)$ Montrer que la série de terme général U_n converge.

$b)$ En déduire que (a_n) converge vers une limite $\ell \neq 0$.

$c)$ En déduire alors que : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \times \ell$.

Théorème 10 Formule de Stirling : $\quad n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

III.3 Comparaison avec une série de Riemann ou « règle du $n^\alpha u_n$ »

***Exemple* 18** Soit $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$. On a $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

Par ailleurs : $n^{\frac{3}{2}} \times u_n \to 0$, donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^{(3/2)}}\right)$.

Or si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. Ici, la série $\sum \dfrac{1}{n^{(3/2)}}$ est une série de Riemann convergente, et $\dfrac{1}{n^{(3/2)}} \geq 0$. Donc $\sum u_n$ converge.

***Exemple* 19** Soit $u_n = \dfrac{1}{(\ln(n))^2}$. On a $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 2$.

Par ailleurs $\lim n u_n = +\infty$. Donc : $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ n u_n \geq 1$. Donc : $\forall n \geq N,\ u_n \geq \dfrac{1}{n} \geq 0$.

Par ailleurs $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique). Or : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs telles que $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang avec $\sum v_n$ divergente, alors $\sum u_n$ diverge.

On peut donc conclure ici que : $\sum u_n$ diverge.

La démarche utilisée dans les deux exemples ci-dessus peut être résumée dans la propriété ci-dessous, qui n'est pas à retenir absolument car elle est **hors-programme**. Cette démarche ne doit pas non plus être utilisée sans justification. Cela étant dit, on peut chercher un réel α tel que $n^\alpha u_n$ ait une limite intéressante quand $n \to +\infty$...

Proposition 9 Soit $\sum u_n$ une séries à termes positifs.

- Si il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ est bornée, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si il existe $\alpha \leq 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ converge vers un réel ℓ **non nul** ou diverge vers $+\infty$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Preuve On se donne $\sum u_n$ une séries à termes positifs.

- Supposons que : il existe $\alpha > 1$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |n^\alpha u_n| \leq K$, c'est à dire : $\left|\dfrac{u_n}{\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}\right| \leq K$.

  Ainsi : $u_n = O(\dfrac{1}{n^\alpha})$. Par ailleurs $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge absolument car $\alpha > 1$. Donc $\sum u_n$ converge.

- Supposons que : il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell > 0$. Alors $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$ (car $\ell \neq 0$). Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n^\alpha}$.

  Par ailleurs $\dfrac{\ell}{n^\alpha} \geq 0$ et $\sum \dfrac{\ell}{n^\alpha}$ diverge car $\alpha \leq 1$. Donc $\sum u_n$ diverge.

- Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ avec $\alpha \leq 1$. Alors à partir d'un certain rang, on a $n^\alpha u_n > 1$, donc $u_n > \dfrac{1}{n^\alpha}$.

  Comme $\alpha \leq 1$, on sait que $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge et donc $\sum u_n$ diverge.

IV BILAN DES OUTILS

- **Etude de la nature d'une série**.

1. Si u_n ne tend pas vers 0, la série est grossièrement divergente.
2. On essaie de reconnaître une série de référence ou une combinaison linéaire de séries de référence.
3. Si $u_n \in \mathbb{R}$, on regarde si u_n est de signe constant ; si u_n n'est pas de signe constant ou $u_n \in \mathbb{C}$, on sait qu'on peut étudier $|u_n|$ car si $\sum |u_n|$ converge, alors on a convergence (absolue) de $\sum u_n$.
4. Si $u_n \in \mathbb{R}$ est de signe constant, on cherche un équivalent de u_n. Sinon, on cherche un équivalent de $|u_n|$.
5. Critère de d'Alembert : calcul de $\lim \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$. Condition pour pouvoir appliquer ce critère ? ?
6. Si $u_n > 0$ pour tout n : on calcule $n^\alpha u_n$ et on cherche α de telle sorte que $n^\alpha u_n$ ait une limite ou soit bornée. Cas le plus simple : $n^\alpha u_n \to \ell \neq 0$ car alors $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature (règle du $n^\alpha u_n$ ou comparaison avec une série de Riemann).
7. On utilise les développements limités/généralisés.
8. On applique le critère de comparaison : si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge, et par contraposée, $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge. Donc, on essaie de majorer/minorer u_n (ou $|u_n|$).
9. On cherche à trouver v_n tel que $\sum v_n$ est absolument convergente et $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ ou bien $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.
10. Si le terme général est de la forme $a_n = f(n)$, où f est continue ; positive, monotone, on peut encadrer les sommes partielles par des intégrales.
11. On peut expliciter les sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
    C'est particulièrement intéressant en cas de série téléscopique.
    Si les u_k sont positifs, on peut appliquer le théorème fondamental : $\sum u_k$ converge si et seulement si la suite (S_n) est majorée.

- **Calcul de la somme d'une série convergente**.

1. On reconnaît des séries de références, ou on s'y ramène.
2. On revient aux sommes partielles : on écrit $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_n$ et on étudie la suite (S_n).
3. Si le terme général est de la forme $a_n = f(n)$, où f est continue ; positive, monotone, on peut encadrer les sommes partielles par des intégrales.
4. L'énoncé vous guide....