

1 Généralités, dérivation

★ **Exercice 1** Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, dérivable. Montrer que si f' a un extremum local en $x_0 \in I$, alors la courbe représentative de f traverse sa tangente en x_0 .

♡★★ **Exercice 2** Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels qui possède n racines réelles distinctes. Montrer que P' possède $n - 1$ racines réelles distinctes.

♡★★★ **Exercice 3**

1. Soit $a < b$ et f une fonction p fois dérivable sur $]a, b[$ qui admet $p + 1$ zéros distincts dans $]a, b[$.
Montrer que $\exists x \in]a, b[, f^{(p)}(x) = 0$.
2. Soit P un polynôme à coefficients dans \mathbb{R} .
Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus un nombre fini de solutions sur \mathbb{R} .
On précisera le nombre maximal de solutions en fonction du degré de P .

♡★ **Exercice 4** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Le but de l'exercice est de montrer que : $\exists x \in \mathbb{R}^+$ tel que : $f'(x) = 0$.

On pose : $g(x) = f(\tan(x))$ pour $x \in [0, \pi/2[$ et $g(\pi/2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$.

Vérifier que g est continue sur $[0, \pi/2]$ et dérivable sur $]0, \pi/2[$, puis conclure.

Peut-on généraliser ce résultat ?

★★ **Exercice 5** Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , à valeurs réelles, de classe \mathcal{C}^1 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 3.$$

- a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(\frac{x}{2} + 3) = \frac{f(x)}{2} + 3$.
- b) En déduire que f' est constante puis déterminer f .

♡★ **Exercice 6** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

- a) Soit $f : x \rightarrow \frac{e^x}{x+2}$. Calculer f', f'' . Construire le tableau de variation de f et préciser $f([0, 1])$.
- b) Justifier : $\forall x \in [0; 1] \quad \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.
- c) Etablir que l'équation $f(x) = x$ admet, sur $[0, 1]$, une unique solution notée α .
- d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$. En déduire que si (u_n) converge, alors sa limite est α .
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$, en déduire $|u_n - \alpha| \leq (\frac{2}{3})^n$. Conclure.
- e) Donner une valeur de n telle que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

2 Dérivées n-ièmes

♡★ **Exercice 7** Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivé n -ième des fonctions suivantes :

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Soit $k \in \mathbb{Z}, f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x^k$ 3. $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)}$ 5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(3x) \cos(2x)$ | <ol style="list-style-type: none"> 2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$ 4. $f :]1, 2[\rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ |
|--|---|
- Penser à la formule de Leibniz
- Ecrire $f(x)$ sous la forme $\frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{x-2}$.

♡★★ **Exercice 8**

1. Montrer que la fonction $f = \text{Arctan}$ est de classe \mathcal{C}^∞ et que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2 + 1)^n}$ où P_n est une fonction polynomiale. On précisera une relation liant P_n et P_{n+1} .
Facultatif : on précisera le degré et le coefficient dominant de P_n , dont on précisera le degré.
2. Montrer que $(1 + x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$ et en déduire une relation liant P_{n-1}, P_n et P_{n+1} pour $n > 1$.
3. En déduire que, pour $n \geq 1$, on a : $(x^2 + 1)P_n''(x) - 2(n-1)xP_n'(x) + n(n-1)P_n(x) = 0$

3 Etudes locales

♡★ **Exercice 9** Déterminer les limites éventuelles en 0 des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b \in \mathbb{R}_+^*)$$

$$2. f(x) = \frac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)}$$

♡★ **Exercice 10** Donner un équivalent simple des expressions suivantes.

- $\sin(x) \times \frac{\ln(1+x^2)}{x \tan(x)}$ quand x tend vers 0.
- $\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$ quand $x \rightarrow 0$ (a et b réels fixés, non nuls).
- $(\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$ quand x tend vers 0.
- Donner un équivalent simple de \tan au voisinage de $\Pi/2$.
- $|\tan(x)|^{\cos(x)}$ quand x tend vers $\Pi/2$.

♡★ **Exercice 11** Donner la limite en 0 des fonctions suivantes (si cette limite existe) :

$$1. f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x \tan(x)}$$

$$2. f(x) = \frac{1 - \exp(-x)}{\sin(x)}$$

$$3. f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$4. f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\ln(1+x)}$$

$$5. f(x) = \frac{\exp(\sqrt{1+\sin x}) - e}{\tan x}$$

$$6. f(x) = x^{(x^x)}, g(x) = (x^x)^x$$

$$7. f(x) = \frac{x \ln^4 x}{\tan(\sqrt{x})}$$

$$8. f(x) = \frac{\exp(\frac{1}{\ln x}) - 1}{x}$$

$$9. f(x) = \frac{\sin 2x - \sin x}{\tan^2 x}$$

$$10. f(x) = \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\exp(x^2) - 1}$$

♡★ **Exercice 12** Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de : $\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x(x+1)}{1+x^2}$

♡★ **Exercice 13** Vrai ou faux ?

$$1. n + \sin n = o(n^2)$$

$$4. \ln(x) + x \sim x$$

$$7. \ln(x)e^{4x} \underset{+\infty}{\sim} e^{4x}$$

$$2. \left(\frac{10}{9}\right)^n = o(n^3)$$

$$5. \frac{e^{-x}}{2x^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$$

$$8. \ln(x) + e^{4x} \underset{+\infty}{\sim} e^{4x}$$

$$3. \frac{1}{n} - \frac{1}{n + \sqrt{n}} \sim 0$$

$$6. \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} \underset{1}{\sim} \frac{1}{2}$$

$$9. \exp(x^2 + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(x^2)$$

★★ **Exercice 14** Calculer les développements limités suivants.

$$1. \text{DL}_3(1) \text{ de } f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

$$2. \text{DL}_3(0) \text{ de } f(x) = \frac{x}{\exp(x) - 1}.$$

$$3. \text{DL}_2(0) \text{ de } f(x) = \exp\left(\frac{x}{\cos(x)}\right).$$

$$4. \text{DL}_3(0) \text{ de } f(x) = \ln(1+x+\sqrt{1+x}).$$

$$5. \text{DL}_2(+\infty) \text{ de } f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3) - \ln(x^2 + x + 1).$$

$$6. \text{DL}_3(+\infty) \text{ de } f(x) = \ln(x \tan(1/x)).$$

$$7. \text{DL}_2(\Pi/4) \text{ de } f(x) = \sqrt{\tan(x)}.$$

$$8. \text{DL}_2(1) \text{ de } f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}.$$

$$9. \text{DL}_2(2\Pi) \text{ de } f(x) = \sin(\sqrt{x^2 - 3\Pi^2}).$$

♡★★ **Exercice 15**

1. Déterminer des réels a et b tels que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{\ln(1+x)} + \frac{a}{x} + b \right) = 0$ et donner pour ces valeurs de a et b un équivalent simple de cette expression quand $x \rightarrow 0$.

2. Déterminer des réels a et b tels que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{\ln(1+x)} + \frac{a}{x} + b = 0$. Donner alors un équivalent simple de cette expression quand x tend vers 0.

★ **Exercice 16** Déterminer des réels a et b tels que la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par : $f(x) = \sqrt{x}$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = ax^2 + bx + 1$ sinon soit dérivable sur \mathbb{R}^{+*} .

★ **Exercice 17** Etudier les branches infinies de \mathcal{C}_f où $f(x) = \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$.

4 Etude d'une réciproque

★★ **Exercice 19** Soit $\left\{ f :]\pi/2, \pi[\rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \frac{1}{\sin(x)} \right\}$. Montrer que f a une réciproque notée g . Donner l'ensemble de définition et le domaine de dérivabilité de g . Calculer g' .

★★ **Exercice 20** On considère la fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$. Démontrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer. Montrer que sa réciproque, notée g , est dérivable sur \mathbb{R} et que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{g(x)}{1 + g(x)}$.

♡ ★★ **Exercice 21** On notera respectivement \cosh , \sinh et \tanh les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer, en étudiant ses variations, que \tanh est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle I de \mathbb{R} à préciser. On note artanh " argument tangente hyperbolique " sa réciproque.
2. Exprimer la dérivée de \tanh en fonction de \tanh .
3. Démontrer que artanh est impaire.
4. Démontrer que artanh est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Exprimer artanh à l'aide de fonctions usuelles.
6. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de artanh en 0.
7. Montrer que la fonction \cosh réalise une bijection de \mathbb{R}^+ vers un intervalle à déterminer. Déterminer explicitement sa réciproque, que l'on notera argch , ainsi que la dérivée de cette réciproque.
8. Montrer que la fonction \sinh réalise une bijection de \mathbb{R} vers un intervalle à déterminer. On notera argsh cette réciproque. Déterminer la dérivée de argsh , sans calculer argsh .

♡ ★★ **Exercice 22** Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x) + \cosh(x) - 1$ est bijective au voisinage de 0. Montrer que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le calculer. (Pour le calcul, on pourra écrire a priori $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$, puis déterminer la valeur de a , et enfin calculer les autres coefficients en écrivant que $f^{-1} \circ f = \operatorname{Id}$ au voisinage de 0).

Exercices d'oral

Exercice 23

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.
2. On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$. En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 24

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$. Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) \implies (f' admet une limite finie en x_0) est fautive.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.