Définition 1 Définitions principales.
Soit Ω un univers fini. On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des **parties** de Ω.

1. Un événement A est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.
2. Soit A un événement. L'événement contraire de A est noté $\overline{A}$, il s'agit de $\Omega \setminus A$.
3. Deux événements A et B sont dit incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
4. Une probabilité P sur Ω est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ vérifiant :
   - $P(\Omega) = 1$
   - pour tous événements incompatibles A et B, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
5. Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.

Remarque 1 Une probabilité sur Ω est entièrement définie par les images des singletons.

Définition 2 Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements.
On dit que $(A_1, \ldots, A_n)$ est un **système complet d'événements** si :

- $A_1, \ldots, A_n$ sont 2 à 2 incompatibles
- $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$

Définition 3 Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On dit que la probabilité P est uniforme, ou qu'il y a **équiprobabilité** si les singletons de $\mathcal{P}(\Omega)$ ont tous la même probabilité, c'est-à-dire :

$$\exists p \in [0, 1] \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = p$$

Proposition 1 Si Ω est un ensemble fini muni de la probabilité uniforme, alors :

$$\forall \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$$

De plus, pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$: $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$

Proposition 2 Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1. Soit A un événement. Alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. Soient A et B deux événements. Alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
3. **Croissance** : soient A et B deux événements tels que $A \subset B$. Alors $P(A) \leq P(B)$.
   (On dit alors que l'événement A implique l'événement B.)

Définition 4 Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit B un événement de probabilité **non nulle**.
On définit la probabilité conditionnelle sachant B , notée P_B par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Alors P_B est une **probabilité** sur Ω.

Remarque 2
1. La probabilité $P_B(A)$ est parfois notée $P(A|B)$.
   Elle est appelée **probabilité conditionnelle de A sachant B**.
2. $A|B$ n'a aucun sens. En particulier ce n'est pas un événement.

Proposition 3 **Probabilités composées**
Soient $A_1,\dots,A_n$ des événements de (Ω,P) tels que $P(A_1\cap\dots\cap A_{n-1})\neq 0$. Alors :

$$P(A_1\cap\dots\cap A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Proposition 4 **Probabilités totales**. Soit $(A_1,\dots,A_n)$ un **système complet d'événements**. Alors :

$$\text{pour tout événement } B \text{ on a : } P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(B\cap A_k)$$

Si de plus les événements $A_1,\dots,A_n$ ont tous une probabilité **non nulle**, alors : $P(B)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P_{A_k}(B)$

Proposition 5 **Formules de Bayes**

1. Soit A et B deux événements de probabilités **non nulles**. Alors : $P_B(A)=\dfrac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$.
2. Soit $(A_1,\dots,A_n)$ un **système complet d'événements** avec $A_1,\dots,A_n$ tous de probabilités **non nulles**. Alors pour tout événement B de probabilité **non nulle** et pour tout $j\in[\![1,n]\!]$:

$$P_B(A_j)=\frac{P(A_j)P_{A_j}(B)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P_{A_k}(B)}$$

Remarque 3 Ces formules ne sont que des prolongations des formules des probabilités conditionnelles et des probabilités totales.

Définition 5 Deux événéments A et B sont dits **indépendants** si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

Proposition 6 Soient A et B deux événements tels que $P(B)\neq 0$. Alors :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff P_B(A)=P(A).$$

Définition 6 Des événements $A_1,\dots,A_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ et tous entiers $1\leq i_1<\dots<i_k\leq n$ on a : $P(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})\dots P(A_{i_k})$

Remarque 4 Si $A_1,\dots,A_n$ sont mutuellement indépendants, **alors** ils sont 2 à 2 indépendants.

Réciproque fausse : des événements peuvent être 2 à 2 indépendants mais sans être mutuellement indépendants !

Définition 7 Soit (Ω,P) un espace probabilisé fini et E un ensemble.

- Une application $X\ :\ \Omega\longrightarrow E$ est appellée **variable aléatoire** sur Ω.
  En général $E\subset\mathbb{R}$ et on parle alors de variable aléatoire **réelle**. (je noterai en abrégé : V.A.R.)
- L'application $P_X\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & E \\ x & \longrightarrow & P([X=x]) \end{array}\right.$ est la **loi de probabilité** de X.

Proposition 7 Soit X une V.A.R. Si on note $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$, alors $([X=x_1],\dots,[X=x_n])$ est un **système complet d'événements** et en particulier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P([X=x_k])=1$.

Remarque 5
1. On notera parfois $P(X=x)$ au lieu de $P([X=x])$.
2. Soit A une partie de E. L'événement $X^{-1}(A)=\{\omega\in\Omega\,/\,X(\omega)\in A\}$ est noté $\{X\in A\}$ ou $(X\in A)$.

Définition 8 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires.

1. On appelle loi conjointe du couple (X, Y) la loi du couple (X, Y).
2. On appelle lois marginales du couple (X, Y) les lois de X et de Y.
3. Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$. La loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ est donnée par :

$$\forall y \in Y(\Omega),\ P_{[X=x]}(Y = y) = \frac{P(Y = y \cap X = x)}{P(X = x)}.$$

Définition 9 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires.

1. On dit que X et Y sont indépendantes si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x])\, P([Y = y]).$$

2. Si X et Y sont **indépendantes** alors pour toutes parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ on a :

$$P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A)\, P(Y \in B).$$

3. Des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont dites **mutuellement indépendantes** si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, on a :

$$P\left([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]\right) = P([X_1 = x_1]) \times \cdots \times P([X_n = x_n])$$

4. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** alors :
pour tout $(A_1, \ldots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Remarque 6 La propriété 4 est formelle à écrire mais facile à comprendre et relève du bon sens.

Proposition 8 Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes**, et si f et g sont des applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Remarque 7 Également valable pour n variables aléatoires **mutuellement indépendantes** et n fonctions $f_1, \ldots, f_n$.

Définition 10 Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé **fini** (Ω, P).
On appelle **espérance** de X le réel : $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$.

Remarque 8

1. On a également : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$.
2. Si X est une variable aléatoire **constante** égale à x_0 alors $E(X) = x_0$.
3. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et X la variable aléatoire indicatrice de A, c'est-à-dire $X : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} X(\omega) = 1 \text{ si } \omega \in A \\ X(\omega) = 0 \text{ si } \omega \notin A \end{array} \right. \end{array} \right.$.

   Alors $E(X) = P(A)$.

Proposition 9

1. **Linéarité**. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(\lambda X) = \lambda E(X).$$

2. **Croissance**. Soit X et Y deux V.A.R. telles que $X \leq Y$ (c'est-à-dire $X(\omega) \leq Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$).

$$\text{Alors } E(X) \leq E(Y).$$

Remarque 9

1. Si X est une variable aléatoire **positive** alors $E(X) \geq 0$.

2. On a donc $E(X+\lambda Y)=E(X)+\lambda\, E(Y)$.

Théorème 1 **Transfert**. Soit X une variable aléatoire et f une application définie sur $X(\Omega)$. Alors :

$$E(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)\, f(x).$$

Proposition 10 Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**. Alors : : $E(XY)=E(X)\,E(Y)$.

Définition 11 Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé **fini**.
On appelle **variance** de X : $V(X)=E\Big((X-E(X))^2\Big)$.
On appelle **écart-type** de X : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Proposition 11 Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé **fini**.

1. On a alors :
$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2.$$
2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Alors :
$$V(aX+b)=a^2\,V(X).$$

Proposition 12 **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**.
Soit X une variable aléatoire réelle admettant une **espérance** μ et une **variance** σ^2. On a alors :

$$\forall \epsilon>0,\; P\Big(\Big[|X-\mu|\geq \epsilon\Big]\Big)\leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

Remarque 10 Interprétation de la **dispersion** en fonction de la variance.

Proposition 13 **Lois usuelles**

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini E. (En général $E\subset\mathbb{R}$ ou $E=[\![1,n]\!]$).
On dit que X suit la **loi uniforme** sur E si : $\forall x\in E,\; P(X=x)=\dfrac{1}{\text{Card}(E)}$.

Dans le cas d'une variable aléatoire **réelle**, notons $E=\{x_1,\ldots,x_n\}$. On a alors : $\boxed{E(X)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}$.

2. Soit $p\in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit la **loi de Bernouilli de paramètre** p si :
$$\begin{cases} X(\Omega)=\{0,1\}\\ P(X=1)=p\end{cases}$$
On notera alors $X\sim\mathcal{B}(p)$. Par ailleurs : $\boxed{E(X)=p}$ et $\boxed{V(X)=p\,(1-p)}$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$. Une variable aléatoire X sur la **loi binomiale** de paramètres (n,p) si :
$$\begin{cases} X(\Omega)=[\![0,n]\!]\\ \forall k\in[\![0,n]\!],\; P(X=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\end{cases}$$
On notera alors $X\sim\mathcal{B}(n,p)$. Par ailleurs : $\boxed{E(X)=n\,p}$ et $\boxed{V(X)=n\,p\,(1-p)}$.

Proposition 14 Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant chacune la loi de **Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$. Alors $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Remarque 11 Pour reconnaître une V.A.R. binomiale, on peut aussi reconnaître son schéma théorique : répétition de n épreuves de Bernoulli **indépendantes** et **de même paramètre** p, et X = nombre de succès (ou de 1) obtenus au cours des n épreuves.