♡* **Exercice 1** Donner une justification combinatoire de la formule suivante (formule de Vandermonde) :

$$\binom{(a+b)}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$$

On pourra penser à dénombrer de plusieurs façons différentes les poignées de p boules prises dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires...

***Exercice 2** On tire avec remise deux jetons d'urne contenant sept jetons numérotés de 1 à 7.
a) Quelle est la probabilité de tirer deux fois le même jeton ?
b) Quelle est la probabilité que le premier jeton ait un numéro strictement inférieur au second ?

***Exercice 3** On lance 7 fois de suite un même dé à 20 faces (que l'on suppose équilibré). Calculer la probabilité pour que l'on obtienne des numéros distincts pour chaque lancer. Puis calculer la probabilité d'obtenir le même numéro pour tous les lancers.

***Exercice 4** On effectue une suite infinie de lancers d'un dé. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note A_i l'événement

« on a obtenu 6 au i-ème lancer ».

1. Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements suivants :

$$E = \bigcap_{i=4}^{+\infty} A_i, \qquad F = \left(\bigcap_{i=1}^{3} \overline{A_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=4}^{+\infty} A_i\right), \qquad G = \bigcup_{i>3} A_i$$

2. Ecrire à l'aide des A_i l'événement « on obtient au moins une fois 6 au delà du n-ème lancer ».
3. On pose $C_n = \bigcup_{i>n} A_i$. Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Caractériser d'une phrase ne comportant pas de vocabulaire mathématique l'événement $C = \bigcap_{n\geq 1} C_n$.
4. Ecrire à l'aide des A_i les événements suivants
H=« on n'obtient que des 6 à partir du n-ème lancer »
K =« On n'obtient plus que des 6 à partir d'un certain lancer ».

****Exercice 5** On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$ et la probabilité d'obtenir Face est $q = 1-p$.

(a) Soit A_n l'événement : "la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $(n-1)$ et n". Calculer $P(A_n)$.
(b) (optionnel) Soit A =« la séquence PF apparaît (un jour) ». Calculer $P(A)$ si $p \neq q$.
(c) Soit B l'événement : « La séquence PP apparaît sans qu'il y ait eu de séquence PF auparavant ». Calculer $P(B)$.

****Exercice 6** Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée. Le joueur A commence ; la pièce amène amène Face avec une probabilité $p \in]0,1[$. Le premier qui obtient Face gagne le jeu, qui s'arrête alors.

1. Quelle est la probabilité pour que A gagne lors de son n-ième lancer ?
2. Quelle est la probabilité pour que A gagne ?
3. Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas ?
4. Y a-t-il une valeur de p qui assure que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner ? (on dit alors que le jeu est équitable).

* **Exercice 7** Une urne contient n_1 boules blanches et n_2 boules noires. On tire une boule de cette urne. Si elle est blanche, on la remet dans l'urne. Si elle est noire, on la remplace par a boules blanches prises dans une réserve auxiliaire, avec $a \in \mathbb{N}$. On tire alors une deuxième boule de l'urne.
Quelle est la probabilité pour que la deuxième boule tirée soit blanche ?

****Exercice 8** On considère les familles de n enfants ($n \geq 2$) et on s'intéresse aux différentes répartitions des sexes : M et F. On note M_i l'événement "le i-ème enfant est du sexe masculin" et on suppose que pour tout i, $P(M_i) = 1/2$, les événements $M_1, \cdots, M_n$ étant mutuellement indépendants. On considère les évéments : A="la famille a des enfants des deux sexes" et B="la famille a au plus une fille".

1. Etudier l'indépendance de ces deux événements dans les cas particuliers $n = 2$ et $n = 3$.
2. Faire l'étude dans le cas général. Indication : au cours des calculs, on poura être amené à considérer la suite $u_n = 2^n - 2n - 2$, dont on pourra montrer qu'elle est strictement croissante pour $n \geq 2$

♡***Exercice 9** On a 3 pièces équilibrées, une pièce ayant ses deux côtés blancs, les deux autres ayant une face blanche et une face noire. On prend une pièce au hasard et on effectue des lancers indépendants de cette pièce.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir "blanc" au premier lancer ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir "blanc" aux n premiers lancers ?
3. Sachant que l'on a obtenu n fois de suite "blanc", quelle est la probabilité que l'on ait pris la pièce unicolore ?

♡****Exercice 10** **Partie A : Calcul matriciel** On considère les matrices suivantes :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}3&2&2\\0&2&4\\3&2&0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&3\\-1&1&3\end{pmatrix}\quad R=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&\frac{-5}{6}\\ \frac{1}{5}&\frac{-2}{15}&\frac{-2}{15}\\ \frac{1}{10}&\frac{1}{10}&\frac{1}{10}\end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices QR et RQ puis $D=RAQ$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, exprimer la matrice A^n en fonction de la matrice D^n et des matrices Q et R.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, donner l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

Partie B : Processus stochastique

- On a trois urnes : une urne blanche, une urne rouge, une urne verte.
  L'urne blanche contient une boule blanche et une boule verte.
  L'urne rouge contient une boule blanche, une boule rouge et une boule verte.
  L'urne verte contient une boule blanche et deux boules rouges.
- On procède à des tirages successifs d'une boule dans l'une de ces urnes. A chaque tirage d'une boule dans une urne, toues les boules présentes ont la même probabilité d'être tirées. Après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne d'où elle provient.
- On choisit au hasard une urne. On note respectivement B_0 (*resp.* R_0, V_0) l'événement : « on choisit initialement l'urne blanche (*resp.* rouge, verte)» et l'on désigne par b_0, r_0, v_0 les probabilités respectives de ces événements, avec $b_0+r_0+v_0=1$. On tire ensuite au hasard dans l'urne choisie.
- La couleur de chaque boule tirée est la couleur de l'urne dans laquelle a lieu le tirage suivant.
- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note respectivement B_n (*resp.* R_n, V_n) l'événement : «on obtient la boule blanche (*resp.* rouge, verte) lors du n-ième tirage» et l'on désigne par b_n, r_n, v_n les probabilités respectives de ces événements.
  Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $X_n=\begin{pmatrix}b_n\\r_n\\v_n\end{pmatrix}$.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, donner l'expression de $b_{n+1}, r_{n+1}, v_{n+1}$ en fonction de b_n, r_n, v_n.
2. Déterminer la matrice $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on ait : $X_{n+1}=MX_n$.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, donner l'expression de b_n, r_n, v_n en fonction de b_0, r_0, v_0 et n. (Indication : utiliser A.3)
4. Déterminer les limites de b_n, r_n et v_n quand n tend vers $+\infty$.

** **Exercice 11** Un sauteur en hauteur tente de franchir des hauteurs successives, numérotées 1,2,..., n, ...On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres et que la probabilité de succès au n-ième saut est $\frac{1}{n}$ pour tout entier $n>0$. Le sauteur s'arrête dès qu'il rate un saut.
Soit X ="le numéro du dernier saut réussi". Montrer que X est une variable aléatoire discrète. Calculer $E(X)$ si elle existe. **NB : On admettra** que la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=e$ sachant que la convergence de cette série ne pose aucun problème à l'aide du critère de D'Alembert.

***Exercice 12** Soit $X\ :\ \Omega\to\mathbb{N}$ une V.A.R. telle que : $\forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k+2)=2P(X=k+1)-\frac{8}{9}P(X=k)$.
Déterminer la loi de X.

♡***Exercice 13** Une urne contient N boules numérotées de 1 à N.

1. On tire n boules avec remise. Soit X le plus petit numéro obtenu et soit Y le plus grand numéro obtenu au cours de ces n tirages.
   (a) Calculer $P(Y\le y)$ pour tout $y\in[\![1\,;\,N]\!]$. En déduire la loi de Y.
   (b) Calculer $P(X\ge x)$ pour tout $x\in[\![1\,;\,N]\!]$. En déduire la loi de X.
2. Calculer la loi de Y, mais en effectuant les tirages sans remise.

***Exercice 14** **On admet** que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$ (On montre la convergence de cette série grâce au critère de D'Alembert).

Question préliminaire : on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{n}{(n+1)!}$ Vérifier que $u_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ puis montrer que la série de terme général u_n est convergente et donner la valeur $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Etude d'une variable aléatoire réelle. Une urne contient une boule noire et une boule blanche.
On tire une boule de l'urne : si elle est noire, on s'arrête et $X = 1$; sinon on remet la boule dans l'urne et on y ajoute une boule noire. On tire à nouveau une boule de l'urne : si elle est noire, on s'arrête et $X = 2$; sinon on remet la boule dans l'urne et on y ajoute une boule noire.
On réitère ainsi le procédé : avant le n-ieme tirage s'il a lieu, il y a dans l'urne n boules noires et une boule blanche ; on tire une boule de l'urne : si elle est noire, on s'arrête et $X = n$; sinon on remet la boule dans l'urne et on y ajoute une boule noire.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
   Dans la suite de l'exercice, on utilisera les événements suivants : B_i "obtenir une boule blanche au i-eme tirage", N_i "obtenir une boule noire au i-eme tirage"
2. Donner la loi de X. Vérifier que la somme de la série de terme général $P(X = n)$ vaut 1.
3. Montrer que la variable $X + 1$ admet une espérance et donner sa valeur. En déduire l'espérance de X. **On admettra que** : si Z est une VAR admettant une espérance, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aZ + b$ a une espérance et de plus $E(aZ + b) = aE(Z) + b$.

♡***Exercice 15** On admettra que : $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

On considère deux jetons J_1, et J_2, équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une probabilité égale à (1/2) d'apparaître au cours d'un lancer).
Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1.
Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1.
Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton.
On note E l'événement " le jeton J_1 est choisi pour le jeu " et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement " le k-ième lancer fait apparaître une face numérotée 1 ".

1. (a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.
   (b) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ?
   Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

   Dans la suite, on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.On considère également la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1 et on pose $Y = 0$ si la face portant le numéro 1 n'apparaît jamais.
   On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, A, P).
2. (a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(X = n)$
   (b) En déduire que $P(X = 0) = \frac{1}{2}$. Ce résultat était-il prévisible ?
   (c) Montrer que X est d'espérance finie puis déterminer $E(X)$.

Exercices d'oral

Exercice 16 Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement "l'animal est en A après son n-ième trajet ".
On note B_n l'événement "l'animal est en B après son n-ième trajet ".
On note C_n l'événement "l'animal est en C après son n-ième trajet ".
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. On pose $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et$U_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer AU_i pour $i = 1, 2$ et 3.
   Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n. **Remarque** : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Exercice 17

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 18 On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement " la boule tirée au n-ième tirage est blanche" et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.