Programme de colle. Semaine n°6.
Du lundi 4 au vendredi 8 novembre 2024

NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément. De plus, les démonstrations/exemples du paragraphe "Questions de cours" sont à savoir faire avec aisance. Attention : les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement, à part quand cela est précisé par la mention « démonstration non exigible » ou « résultat admis ».

1. **Probabilités sur un univers fini** : tout exercice sur le programme de PCSI.
2. **Ensembles dénombrables, familles sommables** : voir le programme précédent.
3. **Probabilités discrètes**
   (a) **Univers, événements** : voir le programme précédent.
   (b) **Probabilité** : Probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, σ-additivité.
   Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Notation $P(A)$.
   Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire.
   Croissance de la probabilité : $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
   Théorème de continuité croissante, continuité décroissante.
   Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$ et $P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$. Sous-additivité : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$. En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$.
   Événement presque sûr, événement négligeable. Système quasi-complet d'événements.
   (c) **Probabilités conditionnelles**
   Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
   L'application P_B définit une probabilité.
   Formule des probabilités composées. Formule de Bayes.
   Formule des probabilités totales : Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors :
   $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)$. *On rappelle la convention* : $P(B|A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.
   (d) **Événements indépendants** Indépendance de deux événements.
   Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à : $P(A|B) = P(A)$.
   Indépendance d'une famille finie d'événements.
   L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
   Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.
   Extension au cas de n événements.
4. **Variables aléatoires discrètes : Premier épisode.**
   (a) **Généralités.**
   Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement. L'univers Ω n'est en général pas explicité.
   Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$. Notation $(X \geqslant x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.
   Loi P_X d'une variable aléatoire discrète.
   La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$.
   On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loin.
   Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
   (b) **Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X**
   X est d'espérance finie si la famille $\big(xP(X = x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X.

Questions de cours : démonstration ou exemples à savoir traiter.

1. Les définitions du chapitre de probabilités discrètes **DOIVENT** être connues.
2. Théorème de continuité croissante (grandes lignes de la preuve).
3. Etre capable de dire ce que l'on admet du modèle décrivant l'expérience "on tire indéfiniment à Pile ou Face".
4. Sous additivité : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.
5. Formule des probabilités totales et formule de Bayes.
6. **Exercice type** : On a n urnes $U_1, \cdots, U_n$. L'urne U_i contient a_i boules blanches et b_i boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une ou plusieurs boules de cette urne, avec remise.
   Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche ?
   Quelle est la probabilité que les 10 premières boules tirées soient blanches ?
   On suppose que la première boule tirée est blanche. Quelle est alors la probabilité de l'avoir tirée dans la première urne ?