INTEGRATION sur un INTERVALLE QUELCONQUE

Table des matières

I Fonctions continues par morceaux

I.1 Fonction continue par morceaux sur un segment

Définition 1 Une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n)$ de $[a; b]$ telle que :
$\forall i \in \{0, 1, ...n-1\}$, la restriction de f à $]a_i; a_{i+1}[$ admet un prolongement continu sur $[a_i; a_{i+1}]$.
Une telle subdivision est dite adaptée à f.
Notation : $CM([a; b], \mathbb{K}) = \{f : [a; b] \to \mathbb{K}\,\text{continue par morceaux}\}$

***Exemple* 1** La restriction de la fonction partie entière à un segment $[a, b]$.
***Exemple* 2** $\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) = \dfrac{1}{x + \lfloor 1 - x \rfloor}$ et $\quad \forall x \in]0, 1],\ g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ et $\quad g(0) = 0$
f et g sont-elles continues par morceaux ?

Proposition 1 (dem)
- Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.
- $CM([a; b], \mathbb{K})$ est un espace vectoriel, stable par produit.

I.2 Intégrale sur un segment

Définition 2 Soit $f \in CM([a;b],\mathbb{K})$, on note $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n)$ une sudvision de $[a;b]$ adaptée à f.
$\forall i \in \{0, 1, ...n-1\}$, on note $\tilde{f}_i$ le prolongement continue de f sur $[a_i; a_{i+1}]$. Alors :

La somme $\quad S_\sigma(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \int_{[a_i;a_{i+1}]} \tilde{f}_i \quad$ ne dépend pas du choix de la subdivision .

Cette somme est appelée intégrale de f et est notée $\displaystyle\int_{[a;b]} f$.

I.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

- Linéarité $f \to \displaystyle\int_{[a;b]} f$ est une forme linéaire de $CM([a;b],\mathbb{K})$.
- Inégalité triangulaire
  Si $f : [a;b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux, alors $|f|$ aussi. et on a : $\left|\int_{[a;b]} f\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f|$
- Positivité et croissance Dans ce paragraphe, f et g sont continues par morceaux sur $[a;b]$ et sont à valeurs réelles.
  - ⋆ Si $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_{[a;b]} f \geqslant 0$.
  - ⋆ Si $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g$
- Relation de Chasles Si $f : [a;b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux, et si $c \in]a;b[$ alors : $\displaystyle\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$
- Changement de variable Si $f : [a;b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux, et si
  $\phi : [\alpha;\beta] \to [a,b]$ est une bijection de classe C^1 strictement croissante alors : $\displaystyle\int_{[a;b]} f(t)dt = \int_{[\alpha;\beta]} f(\phi(u))\phi'(u)du$.
- Attention, si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est positive, continue par morceaux et telle que $\displaystyle\int_{[a;b]} f = 0$ alors cela n'entraine pas que $f = 0$. f peut être non nulle aux points de discontinuité.

I.4 Fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque

Définition 3 Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.
$f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur I, si la restriction de f à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.
Notation : On note $CM(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple 3 1. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \lfloor x \rfloor$.
f est-elle continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$?

2. On considère la fonction g définie par : $\forall x \in]0,2], \quad g(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.
g est-elle continue par morceaux sur $]0,2]$?

Remarque 1 Une fonction continue par morceaux sur un intervalle qui n'est pas un segment peut admettre une infinité de discontinuité et peut ne pas être bornée.

Proposition 2 $CM(I,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel stable par produit.

II Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.

II.1 Généralités

Définition 4 Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f \in CM([a, +\infty[, \mathbb{K})$.
Pour $x \in [a, +\infty[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Si F a une limite finie en $+\infty$, on dit que **l'intégrale** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ **converge** ou **est convergente**.

Sinon, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est dite **divergente**.

Dans les deux cas, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **impropre en** $+\infty$**.**

En cas de convergence : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$ est notée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

***Exemple* 4** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$, $\quad\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\left(2i-\frac{1}{t^2}\right)e^{it^2}dt$, $\quad\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}$, $\quad\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(t)dt$.

Remarque 2 Si $f : [a; +\infty[\to \mathbb{K}$ est continue par morceaux et si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = l \neq 0$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Remarque 3 Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f \in CM([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et enfin soit $c \geq a$.
Alors : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge $\iff$ $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Autrement dit, la nature de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de $+\infty$.

En cas de convergence : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt$.

***Exemple* 5** Le fait que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge nous assure que, pour tout réel $c \in [1, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge aussi.
Ainsi $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge, etc...

Remarque 4

- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} f =$
- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge et si f est continue sur $[a, +\infty[$,
  alors $\left(x \to \displaystyle\int_x^{\infty} f(t)dt\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$; et $\quad\left(x \to \displaystyle\int_x^{\infty} f(t)dt\right)' = -f(x)$

Proposition 3 (Linéarité)
$E = \left\{f \in CM([a, +\infty[, \mathbb{K}) \text{ telles que } \displaystyle\int_a^{+\infty} f \text{ converge}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $CM([a, +\infty[, \mathbb{K})$;

et l'application $f \to \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est une forme linéaire sur E.

Proposition 4 (Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Soit $f : [a; +\infty[\to \mathbb{C}$ continue par morceaux.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^{+\infty}\mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty}\mathrm{Im}(f)$ convergent.

Dans ce cas, on a : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty}\mathrm{Re}(f) + i\int_a^{+\infty}\mathrm{Im}(f)$

***Exemple* 6** Convergence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)dt$

Théorème 1 **RAPPEL** : Soit F une fonction croissante sur un intervalle $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.
Alors F a une limite en $b + \infty$.
Si F est majorée, alors F a une limite finie en $+\infty$, qui vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \sup\limits_{x \in [a, +\infty[} (F)$.
Si F n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.
Finalement : (F a une limite finie en $+\infty \iff F$ est majorée) et dans ce cas : $\lim\limits_{x \to b} F(x) = \sup\limits_{x \in [a, +\infty[} (F)$.

Proposition 5 (Cas où f est à valeurs réelles positives)
Soit $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et à valeurs **positives**.

- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale).
- Si f est continue sur $[a; +\infty[$, et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = 0$ alors $f = 0$.
- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge $\Leftrightarrow$ $\left(x \to \displaystyle\int_a^x f(t)dt\right)$ est majorée sur $[a; +\infty[$.
- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \to \displaystyle\int_a^x f(t)dt\right) = +\infty$.
- Soit $g : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\boxed{\forall t \in [a, +\infty[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t).}$ Alors

$$\left(\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ converge}\right) \Longrightarrow \left(\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge}\right)$$

$$\text{et } \left(\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ diverge}\right) \Longrightarrow \left(\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ diverge}\right)$$

II.2 Intégrales de réference

Proposition 6 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}dt \text{ converge} \iff \alpha > 0\right) \quad \text{et} \quad \left(\underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt}_{\text{intégrale de Riemann}} \text{ converge} \iff \alpha > 1\right)$$

***Exemple* 7** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{1+t^2}dt$?

II.3 Fonction intégrable

Définition 5 (Convergence absolue) Soit $f : [a; +\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
On dit que $\displaystyle\int_a^{\infty} f$ converge absolument lorsque $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge.

Remarque 5 **Attention**, $|f|$ désigne la **valeur absolue** de f si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et son **module** si $\mathbb{C}$.

Proposition 7 Soit $f : [a; +\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
La convergence absolue de $\displaystyle\int_a^{\infty} f$ entraine la convergence de $\displaystyle\int_a^{\infty} f$

Preuve On suppose que $\displaystyle\int_a^{\infty} f$ converge absolument.
Premier cas : la fonction f est à valeurs réelles.
$-|f| \leq f \leq |f|$ donc $0 \leq f + |f| \leq 2|f|$. On pose $g(x) = (f + |f|)(x)$ et $h(x) = 2|f(x)|$.
Alors $0 \leq g \leq h$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} h(t)dt$ converge.
Donc d'après les théorèmes de comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, c'est à dire : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f + |f|$ converge. On soustrait alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ et le tour est joué (on utilise la proposition 3, page 3).
Deuxième cas : f est à valeurs complexes : on écrit $f = \text{Re}(f) + i\text{Im}(f)$. On sait que $|\text{Re}(f)| \leq |f|$ donc par comparaison $\displaystyle\int_a^{+\infty} |\text{Re}(f)|$ converge absolument. De même pour la partie imaginaire. Ensuite on utilise la proposition 4, page 3.

Définition 6 (Fonction intégrable) Soit $f : [a; +\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.

On dit que f est intégrable sur $[a; +\infty[$ lorsque : $\displaystyle\int_a^{\infty} f$ converge absolument

L'ensemble des fonctions intégrables sur $[a; \infty[$ est noté $\mathcal{L}^1([a; +\infty[, \mathbb{K})$.

Remarque 6 Comme l'intégrabilité sur $[a, +\infty[$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de $+\infty$, on dit aussi que f est intégrable en $+\infty$.

***Exemple* 8** La fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

Remarque 7 Si f est de signe constant sur $[a; \infty[$, alors : $\left(f \text{ est intégrable} \iff \displaystyle\int_a^{\infty} f \text{ converge}\right)$.

Remarque 8 $\boxed{f \text{ intégrable sur } [a; +\infty[\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge. Mais la réciproque est fausse !}}$

***Exemple* 9** Montrer que la fonction $(u \mapsto e^{iu^2})$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{iu^2} du$ converge (IPP sur $[1, X]$ puis $X \to +\infty$).

Proposition 8 (Théorèmes de comparaison) Soient $f \in CM([a; +\infty[, \mathbb{K})$ et $g \in CM([a; +\infty[, \mathbb{K})$.

- Si $|f| \leqslant |g|$ alors : $\big(g \text{ intégrable} \Rightarrow f \text{ intégrable}\big)$.
- Si $f \underset{+\infty}{=} O(g)$ alors : $\big(g \text{ intégrable} \Rightarrow f \text{ intégrable}\big)$.
- Si $f \underset{+\infty}{=} o(g)$ alors : $\big(g \text{ intégrable} \Rightarrow f \text{ intégrable}\big)$.
- Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ alors : $\big(g \text{ intégrable} \Leftrightarrow f \text{ intégrable}\big)$.

***Exemple* 10** Nature de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{ch(t)}}dt$, de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(\ln t)}{t^2}dt$

***Exemple* 11**
- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2(1+t^2)}$ est convergente et la calculer.
- Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|x-1|}{x^3}dx$.

III Généralisation aux autres types d'intervalles

III.1 Définitions

III.1.a Intégrales sur un intervalle $[a, b[$

Définition 7 Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $f \in CM([a, b[, \mathbb{K})$. Pour $x \in [a, b[$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Si F a une limite finie à gauche en b^-, on dit que **l'intégrale** $\int_a^b f(t)dt$ **converge**.

Notation lorsqu'elle converge : $\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt = \int_a^b f = \int_a^b f(t)dt$.

Dans les deux cas, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est **impropre en** b.

***Exemple* 12** Quelle est la nature de $\int_0^2 \frac{1}{2-t}dt$? Peut-on la calculer ?

Remarque 9 Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $f \in CM([a, b[, \mathbb{K})$ et enfin soit $c \in [a, b[$.

Alors : $\int_a^b f(t)dt$ converge $\iff$ $\int_c^b f(t)dt$ converge. Dans ce cas : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Ainsi : lorsque $f \in CM\left([a, b[, \mathbb{K}\right)$, la nature de $\int_a^b f$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de b.

III.1.b Intégrale sur un intervalle de la forme $]a, b]$

Définition 8 Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et soit $b \in \mathbb{R}$. Soit $f \in CM(]a, b], \mathbb{K})$. Pour $x \in]a, b]$, on pose $G(x) = \int_x^b f(t)dt$.

Si G a une limite finie à droite en a^+, on dit que **l'intégrale** $\int_a^b f(t)dt$ **converge**.

Notation : $\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$.

Si G n'a pas de limite finie en a^+, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **divergente**.

Dans les deux cas, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale **impropre en** a.

***Exemple* 13** Indiquer la nature des intégrales suivantes : $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$, $\int_{-\infty}^1 e^t dt$ et $\int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$.

Remarque 10 Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et soit $b \in \mathbb{R}$. Lorsque $f \in CM\left(]a, b], \mathbb{K}\right)$, la nature de $\int_a^b f$ ne dépend que

III.1.c Intégrales sur un intervalle ouvert

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à des intégrales sur un intervalle $]a; b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Définition 9 Soit $f \in CM(]a, b[, \mathbb{K})$. On dit que **l'intégrale** $\int_a^b f(t)dt$ **converge** lorsque :

$$\text{il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } \int_a^c f(t)dt \ \boxed{\textbf{et}} \ \int_c^b f(t)dt \text{ convergent.}$$

Dans ce cas, on pose : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Dans les deux cas, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **doublement impropre (en** a **et en** b).

Remarque 11 D'après les remarques 3, 9 et 10, la valeur de c est indifférente.

Remarque 12 Dans ce cas, on étudie la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ en séparant l'intégrale en deux et on effectue une étude séparée sur chacune des bornes.

***Exemple* 14** Nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}$? de $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{it}\ln(t)e^{-2t}dt$? de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt$?

***Exemple* 15** Soit g une fonction continue sur $[a,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge.

Justifier que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} g(t)dt = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x} g(t)dt = 0$.

Définition 10 Soient f et g continues par morceaux sur I (ouvert ou semi-ouvert). On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont **de même nature** si elles sont toutes les deux convergentes ou bien toutes les deux divergentes.

III.2 Propriétés

Toutes les propriétés vues pour les intégrales sur un intervalle $[a,+\infty[$ se généralisent aux intervalles de la forme $[a,b[$ (où b est réel strictement supérieur à a) en remplaçant $+\infty$ par b.

Nous énonçons dans ce paragraphe les propriétés analogues pour les intervalles de la forme $]a,b]$ avec $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$.

Proposition 9 (Linéarité)
$$E' = \left\{ f :]a;b] \to \mathbb{K},\ \text{telles que } \int_a^b f \text{ converge}\right\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } CM(]a;b],\mathbb{K})\,;$$
et l'application $f \to \displaystyle\int_a^b f$ est linéaire.

Proposition 10 (Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) Soit $f :]a;b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)$ convergent.
Dans ce cas, on a : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)$

***Exemple* 16** Convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}dt$?

Proposition 11 (Cas où f est à valeurs réelles positives)
Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et à valeurs **positives.**

- Si $\displaystyle\int_a^b f$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale).
- Si f est $\boxed{\textbf{continue}}$ sur $]a;b]$, et si $\displaystyle\int_a^b f = 0$ alors $f=0$.
- $\displaystyle\int_a^b f$ converge $\Leftrightarrow$ $\left(x \to \displaystyle\int_x^b f(t)dt\right)$ est majorée sur $]a;b]$.
- $\displaystyle\int_a^b f$ diverge $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\left(x \to \int_x^b f(t)dt\right) = +\infty$.
- Soit $g :]a;b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\boxed{\forall t \in]a;b],\ 0 \le f(t) \le g(t).}$ Alors
$$\left(\int_a^b g(t)dt \text{ converge}\right) \Longrightarrow \left(\int_a^b f(t)dt \text{ converge}\right) \quad \text{et} \quad \left(\int_a^b f(t)dt \text{ diverge}\right) \Longrightarrow \left(\int_a^b g(t)dt \text{ diverge}\right)$$

Proposition 12 (Intégrales de référence) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et a et b deux réels tels que $a < b$.

- $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ converge.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge $\iff$ $\alpha < 1$ (intégrale de Riemann)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t}dt$ converge $\iff$ $\alpha > 0$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|t|^\alpha}dt$ converge $\iff$ $\alpha > 1$ (intégrale de Riemann)

Définition 11 (Convergence absolue) Soit $f :]a;b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
On dit que $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument lorsque $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge.

Proposition 13 Soit $f \in CM\,(]a;b],\mathbb{K})$. La convergence **absolue** de $\displaystyle\int_a^b f$ entraîne la convergence de $\displaystyle\int_a^b f$

Définition 12 (Fonction intégrable) Soit $f :]a;b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
On dit que f est intégrable sur $]a;b]$ (ou intégrable en a), lorsque : $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument
L'ensemble des fonctions intégrables sur $]a;b]$ est noté $\mathcal{L}^1(]a,b],\mathbb{K})$.

Proposition 14 (Théorèmes de comparaison) Soient f et g continues par morceaux $]a;b] \to \mathbb{K}$.

- Si $|f| \leqslant |g|$ alors g intégrable sur $]a;b]$ $\Rightarrow$ f intégrable sur $]a;b]$.
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ alors g intégrable en a $\Rightarrow$ f intégrable en a.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors g intégrable en a $\Rightarrow$ f intégrable en a.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors g intégrable en a $\Leftrightarrow$ f intégrable en a.

***Exemple* 17** Nature des intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 (\ln(t))^2 \cos(t)dt$, $J = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ et $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2}dx$.

IV Propriétés de l'integrale sur un intervalle quelconque

Dans cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Proposition 15 (Linéarité)
L'ensemble $\left\{ f : I \to \mathbb{K}, \quad \text{t.q} \quad \int_I f \text{ converge} \right\}$ est un sous espace vectoriel de $CM(I, \mathbb{K})$;
et l'application $f \to \int_I f$ est linéaire.
L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et intégrables sur I est noté $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.
$\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est un sous espace vectoriel de $CM(I, \mathbb{K})$.

Proposition 16 (Cas où f est à valeurs réelles) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.

- Si $\int_I f$ converge et si f est positive, alors $\int_I f \geqslant 0$.
- Si f est continue et positive sur I, et si $\int_I f = 0$ alors $f = 0$.
- Si f et g sont continues par morceaux sur I, telles que $f \leqslant g$ et telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent, alors $\int_I f \leqslant \int_I g$

Proposition 17 (Inégalité triangulaire) Soit f continue par morceaux et intégrable sur I, alors : $\left| \int_I f \right| \leqslant \int_I |f|$

Proposition 18 Relation de Chasles : Soit f continue par morceaux sur I, telle que $\int_I f$ converge.
Soient x, y et z, trois points ou extrémités de I.
Alors les intégrales $\int_x^y f$, $\int_x^z f$ et $\int_z^y f$ convergent et $\int_x^y f = \int_x^z f + \int_z^y f$

Proposition 19 (Résultat spécifique aux intervalles bornés) Soit $f :]a; b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
Si f est bornée sur $]a; b]$, alors f est intégrable sur $]a; b]$.

***Exemple* 18** Nature de $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$? de $\int_0^1 x\ln(x)dx$?

V Calculs d'intégrales

V.1 Technique déjà à notre disposition si f est continue sur I

Si $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et l'on connait une primitive F de f , on peut écrire

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} (F(c) - F(x)) + \lim_{y \to b^-} (F(y) - F(c)) = \lim_{y \to b^-} F(y) \; - \lim_{x \to a^+} F(x)$$

si toutefois ces limites sont finies évidemment....
N.B. : il n'est pas nécessaire de calculer $F(c)$. Il est toutefois très conseillé de décomposer le calcul : le correcteur doit être convaincu que vous avez examiné la convergence de l'intégrale impropre EN a ET EN b.

V.2 Utilisation précautionneuse de la linéarité

Si f s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions **dont les intégrales convergent** sur $]a, b[$, on peut écrire

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b (\alpha g(t) + \beta h(t))dt = \alpha \int_a^b g(t)dt + \beta \int_a^b h(t)dt$$

Attention à bien justifier ceci en notant/prouvant que les intégrales $\int_a^b g(t)dt$ et $\int_a^b h(t)dt$ convergent !

***Exemple* 19** Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{(1+t^2)^2} + te^{-t^2} \right) dt$

V.3 Intégration par parties sur un intervalle quelconque

Théorème 2 Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
On suppose que la fonction $t \mapsto u(t)v(t)$ **admet une limite finie en** a **et en** b.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)dt$ sont de même nature.

En cas de convergence, on a de plus : $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)dt = \lim_{t\to b^-}(u(t)v(t)) - \lim_{t\to a^+}(u(t)v(t)) - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

ce que l'on peut aussi écrire : $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

***Exemple* 20** Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ et calculer I.

Remarque 13 Il peut arriver qu'on ne puisse pas utiliser ce théorème, mais qu'une intégration par parties soit néanmoins judicieuse. Prenons par exemple $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$.

Commencer par justifier l'existence de I.

Pour calculer I, on souhaite ensuite effectuer une intégration par parties en posant :

$$u(t) = \ln(t) \text{ et } v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \text{ et enfin } v(t) = -\frac{1}{1+t}.$$

Mais on ne peut pas appliquer le théorème car $\displaystyle\lim_{t\to 0} u(t)v(t) = +\infty$.

On peut toutefois écrire : $I = \displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$.

Calculer $\displaystyle\int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$ puis faire tendre x vers 0 pour trouver I.

V.4 Changement de variable

Théorème 3 Etant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales

$$\int_a^b f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,|\varphi'(u)|\,du$$

sont de même nature et égales en cas de convergence.

Preuve (dém. non exigible) Démontrons le théorème dans le cas où φ est strictement croissante.
Si F est une primitive de f, alors $F\circ\varphi$ est une primitive de $u \mapsto \varphi'(u)f\circ\varphi(u)$.
Soit $c \in]a,b[$. On s'intéresse tout d'abord à $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$.
Le théorème de la bijection monotone permet d'écrire que $a = \displaystyle\lim_{t\to\alpha}\varphi(t)$. Soit $X \in]a,b[$. On pose $x = \varphi(X)$ et $c = \varphi(C)$.

$$\int_X^C f\circ\varphi(u)\varphi'(u)du = [F\circ\varphi(C) - F\circ\varphi(X)] = [F(x) - F(c)] = \int_x^c f(t)dt$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_X^C f\circ\varphi(u)\varphi'(u)du$ converge si et seulement si $F\circ\varphi(X)$ a une limite quand X tend vers α, ce qui revient à dire que x tend vers a, car φ bijective et monotone. Et $F\circ\varphi(X) \underset{X\to\alpha}{\to} L \iff F(x) \underset{x\to a}{\to} L$.
Dans le cas où ces deux intégrales convergent, elles sont donc bien égales. Puis on procède de même en b...
Démonstration analogue si φ est strictement décroissante.

Remarque 14 En pratique, si φ est croissante, alors $\varphi' > 0$ et donc l'égalité s'écrit :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$$

Et si φ est décroissante, alors $\varphi' < 0$ et donc l'égalité s'écrit :

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du = \int_\beta^\alpha f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$$

***Exemple* 21**
1. Effectuer le changement de variable $t = \sqrt{u}$ dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
2. Montrer que $\int_1^2 \frac{dt}{(t-1)^\alpha}$ converge si et seulement si
3. Soit $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\cos^2(t)}$.
   (a) Justifier l'existence de I.
   (b) Effectuer le changement de variable $u = \tan(t)$ dans l'intégrale I, après avoir justifié qu'il est licite.
   (c) Calculer I.

Proposition 20 (Intégrales de Riemann sur un intervalle borné.) Soit deux réels $a < b$.
Les intégrales $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ et $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$.

***Exemple* 22** Nature de $\int_1^3 \frac{1}{(3-t)^{0.3}} dt$.

Remarque 15 De même : la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en $a^+ \iff t \mapsto f(a+t)$ est intégrable en 0^+.
Et : $x \mapsto f(x)$ est intégrable en $b^- \iff t \mapsto f(b-t)$intégrable en 0^+.

V.5 Approfondissement : Etude d'intégrales semi-convergente

Définition 13 on dit qu'une intégrale est semi-convergente lorsqu'elle est convergente mais pas absolument convergente.

***Exemple* 23 (Ultra-classique : intégrale de Dirichlet)** $\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.

1. L'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ est-elle définie ?
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.
3. Montrons que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Montrer que $\int_0^{(n+1)\pi)} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+k\pi} du$. (Voir réponse ci-dessous)
   (b) Montrer que $\int_0^{(n+1)\pi)} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$). (Voir réponse ci-dessous)
   (c) Conclure. (A faire !)

   Réponse :

   (a) $\int_0^{(n+1)\pi)} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = \sum_{k=0}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi)} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$

   Par ailleurs on peut poser $t = k\pi + u$ dans $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi)} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$, ce qui donne

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi)} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = \int_0^\pi \left|\frac{\sin(u+k\pi)}{u+k\pi}\right| du = \int_0^\pi \left|\frac{(-1)^k\sin(u)}{u+k\pi}\right| du = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+k\pi} du$$

   (b) La fonction $u \mapsto \frac{\sin(u)}{u+k\pi}$ est à valeurs positives sur $]0,\pi[$, donc

$$\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+k\pi} du \geq \int_{\pi/4}^{3\pi/4)} \frac{\sin(u)}{u+k\pi} du \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\pi/4}^{3\pi/4)} \frac{du}{u+k\pi} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi/2}{(k+1)\pi}$$

   Donc $\int_\pi^{(n+1)\pi)} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{(k+1)\pi)} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi/2}{(k+1)\pi} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \to +\infty$.

   Ainsi $\lim_{n\to\infty} \int_\pi^{(n+1)\pi)} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = +\infty$.

VI Conclusion

Etude de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ou de $\displaystyle\int_I f(t)dt$ où I est un intervalle d'extrémités a et b ($a=\inf(I)$ et $b=\sup(I)$).

1. **Reconnaître une intégrale impropre.**
   (a) **si I n'est pas borné, c'est une intégrale impropre.**
   (b) Si I est borné et si f est continue sur $[a,b]$ ce n'est pas une intégrale impropre. Il n'y a pas de convergence à justifier.
   (c) Si f est continue sur $[a,b[$ ou $]a,b]$ ou $]a,b[$, sans l'être sur $[a,b]$, c'est une intégrale impropre dont il faut justifier la convergence. Avant tout chose, on précise si elle est impropre en a, en b, ou les deux. Si $I=]a,b[$, on étudie séparément la convergence en a et en b, autrement dit, on étudie $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ séparément (avec $c\in]a,b[$)
2. **Pour montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge :**
   (a) Si $I=[a,b[$, on peut montrer que $\left(x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right)$ a une limite finie quand $x\to b^-$
   (b) Si f est positive, on trouve g intégrable telle que $0\le f\le g$.
   (c) Si f est positive, on trouve g intégrable telle que $f\underset{b}{\sim}g$.
   (d) On peut montrer que la fonction f est intégrable ($\Rightarrow$ items suivant)
3. **Pour montrer que f est intégrable :**
   (a) On trouve g réelle positive intégrable sur I, telle que $|f|\le g$.
   (b) Si $I=[a,b[$. On trouve g réelle positive intégrable telle que $|f|\underset{b}{\sim}g$.
   (c) Si $I=[a,b[$. On trouve g réelle positive intégrable telle que $f\underset{t\to b}{=}O(g(t))$
   (d) Si $I=[a,b[$. On trouve g réelle positive intégrable telle que $f\underset{t\to b}{=}o(g(t))$
4. **Techniques pour calculer une intégrale impropre, par exemple pour** $I=[a,b[$.
   (a) On calcule $\displaystyle\int_a^x f$ puis on fait tendre x vers b.
   (b) Changement de variable. Bien vérifier que le changement de variable φ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone, bijectif.
   (c) Utilisation **précautionneuse** de la linéarité : pour écrire $\displaystyle\int_I(f+\lambda g)=\int_I f+\lambda\int_I g$, il faut que $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ convergent.
   (d) Integration par parties sur $I=[a,b[$ par exemple, et on veut intégrer $f()=u(t)v'(t)$.
   - si $u(t)v(t)$ a des limites finies aux bornes, on utilise le théorème d'IPP.
   - On écrit l'IPP entre a et x et on fait tendre x vers b.

   (e) On se laisse guider par l'énoncé...