Programme de colle. Semaine n°8.
Du lundi 18 au vendredi 22 novembre 2024

NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément. De plus, les démonstrations/exemples du paragraphe "Questions de cours" sont à savoir faire avec aisance. Attention : les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement, à part quand cela est précisé par la mention « démonstration non exigible » ou « résultat admis ».

1. **Réviser le programme de PCSI** : intégrale définie sur un segment, calculs de primitives et d'intégrales.
2. **Fonctions continues par morceaux** sur un segment, puis sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux. Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
3. **Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme** $[a,+\infty[$
   Pour f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Notations $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
   Si $f \in CM([a,+\infty[,\mathbb{R})$ et $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.
   Si $f \in CM([a,+\infty[,\mathbb{R})$ et $g \in CM([a,+\infty[,\mathbb{R})$ sont telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.
4. **Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque**
   Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. Notations $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.
   Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
5. **Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables**
   La convergence absolue implique la convergence. (L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.) Inégalité triangulaire.
   Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente. Notations $\displaystyle\int_I f$, $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $I = [a,b[$, (respectivement $]a,b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).
   Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
   Si f est **continue**, intégrable et positive sur I, et si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.
   Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$:
   - si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f.
     Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.
   - si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.

   Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.
6. **Intégrales généralisées de référence** : pour $\alpha \in \mathbb{R}$,
   - intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ;
   - étude de l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-\alpha t}$ en $+\infty$.
   - intégrabilité de $t \mapsto \ln(t)$ en 0

Questions de cours : démonstration ou exemples à savoir traiter.

1. Enoncé du théorème de changement de variable pour une intégrale sur un segment.
2. Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes, après avoir indiqué sur quel intervalle il est pertinent de travailler :
$$\left(x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\right) \text{ et } \left(x \mapsto \frac{1}{1-x^2}\right) \text{ et } (x \mapsto a^x) \text{ et } \quad (x \mapsto x^a)\left(x \mapsto x^n\right) \text{ et } \left(x \mapsto \frac{1}{x^n}\right) \text{ et } \left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \text{ et } \left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
3. Enoncer la formule de Taylor avec reste intégral. Enoncer le théorème sur les sommes de Riemann.
4. Calculs type à savoir faire : $\displaystyle\int_0^X \frac{dt}{t^2+t+1}, \int_a^X \frac{dt}{t^2-5t+6}$.
5. Définition d'une fonction continue par morceaux
6. (énoncé et démo.) Si $f, g \in CM([a,+\infty[,\mathbb{R})$ sont telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$
7. Etre capable d'énoncer avec précision les divers théorèmes de comparaison permettant de conclure à la convergence ou à la divergence d'une intégrale impropre.
8. Intégrales de référence (énoncé et dém.)