

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Table des matières

I	Rappels	2
II	Reduction des endomorphismes	2
II.1	Eléments propres d'un endomorphisme	2
II.2	Propriétés	3
II.3	Polynôme d'endomorphisme et valeur propre	4
II.4	Endomorphismes diagonalisables	5
III	Réduction des matrices carrées	6
III.1	Eléments propres d'une matrice carrée	6
III.2	Matrices diagonalisables	7
IV	Polynôme caractéristique	9
IV.1	Introduction	9
IV.2	Propriétés	10
IV.3	Ordre de multiplicité des racines du polynôme caractéristique	12
V	En pratique : diagonaliser une matrice ou un endomorphisme....	14
VI	Diagonalisabilité et polynomes annulateurs	14
VII	Trigonalisation	15
VII.1	Introduction : définition, propriétés	15
VII.2	Comment trigonaliser une matrice 3×3 (non diagonalisable) admettant une valeur propre simple et une valeur propre double	16
VII.3	Comment trigonaliser une matrice 3×3 (non diagonalisable) admettant une valeur propre triple λ et dont l'espace propre est de dimension 2	16
VIII	Applications de la diagonalisation et de la trigonalisation	17
IX	Bilan (partiel) outils	18

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E un \mathbb{K} -espace vectoriel

I Rappels

Définition 1 Soient F_1, \dots, F_r des sous-espaces vectoriels de E .

On dit que la somme $F_1 + \dots + F_r$ est **directe**, et on la note $F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ ou $\bigoplus_{i=1}^r F_i$ lorsque :

$$\forall x \in F_1 + \dots + F_r, \exists!(x_1, \dots, x_r) \in F_1 \times \dots \times F_r, \quad \text{tel que } x = x_1 + \dots + x_r$$

Proposition 1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ une somme directe de sous-espaces vectoriels (non réduits à $\{0\}$). Soient $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ des bases respectives de F_1, \dots, F_r .

- Alors la famille obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ est une base de $F_1 \oplus \dots \oplus F_r$.
- $\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_r) = \sum_{i=1}^r \dim(F_i)$.

Proposition 2 Soient F_1, \dots, F_r des sous-espaces vectoriels de E (de dimension finie).

Soient $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ des bases respectives de F_1, \dots, F_r .

Si la famille obtenue par **concaténation** de $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ est une base de E , alors la somme des F_i est directe et de plus : $F_1 \oplus \dots \oplus F_r = E$.

Corollaire 1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base \mathcal{B} .

Si on partitionne \mathcal{B} en $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$, et si on pose $F_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.

II Réduction des endomorphismes

II.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Définition 2 (Éléments propres d'un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Soit f un endomorphisme de E . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- λ est une valeur propre de f si et seulement si il existe un vecteur x non nul de E tel que $f(x) = \lambda x$.
- Un tel vecteur x est appelé vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .
- L'ensemble des valeurs propres de f est appelé spectre de f et est noté $\text{spec}(f)$.
- Si λ est une valeur propre de f , alors $E_\lambda = \{x \in E, f(x) = \lambda x\}$ est appelé sous-espace propre associé à λ

Notation : $\text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = V(\lambda) = E_\lambda = V_f(\lambda) = \dots$ à préciser....

Exemple 1 Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x, y + 3z, 4y)$ Calculer $f(e_1)$, montrer que 2 est une valeur propre de f , déterminer le sous espace propre de f associé à la valeur propre $\lambda = 2$.

Exemple 2 Pour tout $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (-y, x)$. Valeurs propres de f ?

II.2 Propriétés

Proposition 3 Soit f un endomorphisme de E .

1. Le sous espace propre de f associé à λ est le noyau de $(f - \lambda \text{Id}_E)$:

$$E_\lambda = \{x \in E, f(x) = \lambda x\} = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de E .

2. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (a) λ est une valeur propre de f
- (b) $\exists x \neq 0, f(x) = \lambda x$
- (c) $\exists x \neq 0, f(x) - \lambda x = 0$
- (d) $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\}$
- (e) $(f - \lambda \text{Id}_E)$ n'est pas injective
- (f) $(f - \lambda \text{Id}_E)$ n'est pas bijective (valable si E de dimension finie)

Théorème 1 (dem)

- (a) 2 vecteurs propres de f associés à 2 valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 sont linéairement indépendants.
- (b) p vecteurs propres de f associés à p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ forment une famille libre.
- (c) Si E est de dimension n , alors tout endomorphisme f de E admet au maximum n valeurs propres distinctes.

Théorème 2 (Somme de sous-espaces propres)

Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

Autrement dit : si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres de f deux à deux distinctes, alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

Conséquence : $\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) \leq \dim(E)$

Preuve Démonstration par récurrence sur le nombre de sous-espaces propres. On se donne $f \in \mathcal{L}(E)$.

On pose H_r : « Si F_1, \dots, F_r sont des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes de f ,

alors la somme $\sum_{i=1}^r F_i$ est directe ».

Démonstration à faire ... ■

Proposition 4 (Vecteurs propres et sous espace stable. (dem))

- Un vecteur x non nul de E est un vecteur propre de f si et seulement si la droite vectorielle $\text{Vect}(x)$ est stable par f .
- Si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

II.3 Polynôme d'endomorphisme et valeur propre

Proposition 5 (dem) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Soit P un polynome.

Soit x un vecteur de E tel que $f(x) = \lambda x$, alors $P(f)(x) = P(\lambda)(x)$

Autrement dit : si $P = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k$ et $x \in E_\lambda$ alors $P(f)(x) = \left(\sum_{k=0}^N \alpha_k \lambda^k \right) x$.

Proposition 6 (Valeur propre et racine d'un polynome annulateur)

Si P est un polynome annulateur de f et si λ est une valeur propre de f alors λ est une racine de P .

La réciproque est fautive : toute racine de P n'est pas nécessairement une valeur propre.

Remarque 1 Le résultat précédent est à exploiter lorsqu'on dispose d'un polynome annulateur de f , et que l'on cherche les valeurs propres de f : il n'est pas nécessaire de faire une recherche générale des valeurs propres, il suffit de les chercher parmi les racines du polynome annulateur .

Exemple 3 Valeurs propres d'un projecteur ? D'une symétrie vectorielle ?

II.4 Endomorphismes diagonalisables

Dans tout ce qui suit, E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f est un endomorphisme de E .

Définition 3

On dit que f est **diagonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. Une telle base est alors appelée une **base de diagonalisation de f** .

Diagonaliser un endomorphisme, c'est trouver une base de diagonalisation pour cet endomorphisme.

Exemple 4 Donner des exemples d'endomorphismes diagonalisables.

Proposition 7 f est diagonalisable \iff $\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une base de } E \text{ formée de} \\ \text{vecteurs propres de } f. \end{array} \right\}$

Proposition 8 (Caractérisation des endomorphismes diagonalisables. (dem))

Soit f un endomorphisme de E . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est diagonalisable.
- E est somme directe des sous-espaces propres de f : $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f)$
- $\dim(E) = \sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(f))$

Exemple 5 1. Considérons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; f est-il diagonalisable?

2. Même question avec la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Même question avec les matrices suivantes : $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemple 6 ♡ Que dire d'un endomorphisme diagonalisable, qui admet une seule valeur propre λ ?

Proposition 9 Si f a n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

III Réduction des matrices carrées

III.1 Éléments propres d'une matrice carrée

Définition 4 (Éléments propres d'une matrice carrée) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- λ est une valeur propre de A si et seulement si il existe une matrice colonne X **non nulle** de $M_{n,1}$ telle que $AX = \lambda X$.
- Un tel vecteur X est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .
- L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et est noté $\text{spec}(A)$.
- Si λ est une valeur propre de A , alors $E_\lambda = \{X \in M_{n,1}, AX = \lambda X\} = \text{Ker}(A - \lambda I)$ est appelé sous-espace propre associé à λ

Notation : $\text{Ker}(\lambda I_n - A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n) = V(\lambda) = E_\lambda = V_A(\lambda) = \dots$ **à préciser....**

Proposition 10 Si E est rapporté à une base \mathcal{B} , si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ alors :

$$(\vec{x} \in E \text{ est vecteur propre de } f \text{ associé à } \lambda) \iff \left(\begin{array}{l} X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) \text{ est vecteur propre de } A \\ \text{associé à } \lambda \end{array} \right).$$

Remarque 2 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note f l'endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement associé à A . La traduction des propriétés (du paragraphe II.2) sur la matrice A donne :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } f &\iff \lambda \text{ est une valeur propre de } A \\ &\iff \exists X \neq 0, \quad AX = \lambda X \\ &\iff \exists X \neq 0, \quad (A - \lambda I)X = 0 \\ &\iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \\ &\iff (A - \lambda I) \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I) = 0 \end{aligned}$$

Exemple 7 Déterminer les valeurs propres de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donner une base de chaque sous-espace propre.

Même question pour la matrice $aJ + bI$; avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

Remarque 3 Il peut arriver que le spectre dépende du corps \mathbb{K} considéré. Dans ce cas, on note $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$. Considérons par exemple la matrice $R(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$ où $x \notin 0[\pi]$. Quel est le spectre de $R(x)$ dans \mathbb{R} ? Dans \mathbb{C} ?

Théorème 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , rapporté à une base B .

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice A dans la base B , alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. λ est valeur propre de f
2. $\text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - f) \neq \{\vec{0}\}$ (ou $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{\vec{0}\}$)
3. $\dim \text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - f) \geq 1$
4. $\lambda \text{Id}_E - f$ n'est pas bijective
5. $\lambda I_n - A$ n'est pas inversible
6. $\det(\lambda I_n - A) = 0$ (ou $\det(A - \lambda I_n) = 0$)
7. λ est valeur propre de A

Par conséquent, $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f)$.

De plus : les dimensions des sous-espaces propres associés sont les mêmes car :

$$\text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E) = \text{rg}(A - \lambda I_n).$$

Proposition 11 (Polynôme annulateur et valeur propre d'une matrice)

Si P est un polynôme annulateur d'une matrice A et si λ est une valeur propre de A alors λ est une racine de P . La réciproque est fautive : toute racine de P n'est pas nécessairement une valeur propre de A

Exemple 8 On admet que $P = X^3 - X^2 - 2X$ annule la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres de A

III.2 Matrices diagonalisables

Définition 5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **diagonalisable** (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) lorsque :

il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Diagonaliser une matrice, c'est trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Proposition 12 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

A est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A .

Soit (X_1, \dots, X_n) une telle base (avec $AX_i = \lambda_i X_i$) et soit P la matrice dont les colonnes sont X_1, \dots, X_n , alors

$$P^{-1}AP = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Preuve Pour toute matrice M , notons $(M)_i$ la i -ème colonne de M .

Supposons que $P^{-1}AP = D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Alors $AP = PD$ donc $(AP)_i = (PD)_i$ pour $i = 1..n$.

Notons X_i la i -ème colonne de P .

On a par ailleurs $(AP)_i = A(P)_i = AX_i$ et $(PD)_i =$

Donc $AX_i = \lambda_i X_i$. De plus $X_i \neq 0$ car

Donc la i -ème colonne de P est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i . De plus, la matrice P étant inversible, les colonnes de P forment une famille de rang n , autrement dit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A .

Réciproquement : Supposons que l'on a n vecteurs propres de A formant une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On note X_1, \dots, X_n ces vecteurs propres et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Montrons que la matrice $P = (X_1 | \dots | X_n)$ est inversible et vérifie $P^{-1}AP = D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

P est inversible car :

$$(P^{-1}AP)_i = P^{-1} \times (AP)_i =$$

■

Proposition 13 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , rapporté à une base B . Si $f \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice A dans la base B alors :

A est diagonalisable si et seulement si f est diagonalisable.

Remarque 4 Soit A une matrice réelle. Il peut arriver que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ne le soit pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par exemple si le spectre de A est vide dans \mathbb{R} (voir remarque 3, page 6) .

Exemple 9 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exemple 10 Soit A la matrice carrée de taille $n \geq 2$ ne contenant que des 1.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

On précisera les dimensions des sous-espaces propres et on en donnera des bases.

Enfin : la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exemple 11 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre. (NB : il y a deux valeurs propres). Diagonaliser A si c'est possible (en le justifiant).

Exemple 12 1. Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable admettant 1 pour SEULE valeur propre ?

♡ **Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable admettant une unique valeur propre λ ?**

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? inversible ?

et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? inversible ?

2. Donner un exemple de matrice

- (a) diagonalisable et inversible,
- (b) diagonalisable et non inversible,
- (c) non diagonalisable et inversible,
- (d) non diagonalisable et non inversible.

A vous de jouer : Quelles propositions portant sur les matrices peut-on formuler en appliquant les propositions 8 et 9 ? (voir page 5)

IV Polynôme caractéristique

IV.1 Introduction

Rappels : Nous avons vu que $\lambda \in \text{Sp}(A) \iff$
 Nous allons donc étudier plus précisément $(x \mapsto \det(xI_n - A))$.

Exemple 13 1. Déterminer $\det(xI_2 - A)$ pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(xI_3 - A)$ est une fonction polynomiale de degré 3.

Theorème-Definition 4 (Polynôme caractéristique)

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $(\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \det(xI_n - A))$ est une fonction polynomiale. Le polynôme ainsi défini, est appelé **polynôme caractéristique de A** (et souvent noté χ_A).
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'application $(\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \det(xId_E - f))$ est une fonction polynomiale. Le polynôme ainsi défini est appelé **polynôme caractéristique de f** (et souvent noté χ_f).
- Si A est la matrice de f dans une base quelconque \mathcal{B} , alors $\chi_f = \chi_A$.

Lemme 5 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on pose $P(x) = \det(A + xB)$.
 La fonction P ainsi définie est une fonction polynomiale à coefficients dans \mathbb{K} et $\deg(P) \leq n$.

Preuve (du lemme)

Procédons par récurrence. Le résultat est immédiat pour $n = 1$ et $n = 2$.

Soit $n \geq 2$, fixé. Supposons le lemme vrai pour les matrices de taille $n - 1$ et considérons A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ et $M = (m_{ij}) = (a_{ij} + xb_{ij})$.

Pour tout couple (i, j) on notera A_{ij} (resp. B_{ij} ou M_{ij}) la matrice obtenue en barrant dans A (resp. dans B ou M) la i -ème ligne et la j -ème colonne.

Développons le déterminant $\text{Det}(A + xB)$ par rapport à la première colonne :

$$\text{Det}(M) = P(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{(i+1)} (a_{i1} + xb_{i1}) \times \text{Det}(A_{i1} + xB_{i1}).$$

L'hypothèse de récurrence permet de conclure que P est une fonction polynomiale et $\deg(P) \leq n$. ■

Preuve (du théorème) Le deuxième item du théorème est une conséquence immédiate du premier item.

Le 1er item du théorème est une conséquence immédiate du lemme.

Le 3e item à faire en cours... ■

Théorème 6 (Expression du polynôme caractéristique χ_A . (dem))

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. le polynôme caractéristique de A est de degré n et vérifie :

$$\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

Preuve Le coefficient constant d'un polynôme P est égal à $P(0)$. Donc $\chi_A(x) = \text{Det}(0I_n - A) = (-1)^n \text{Det}(A)$.

Pour montrer le théorème, il nous reste à nous intéresser aux deux termes de plus hauts degrés de χ_A .

Posons : H'_n : « Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + a_0$ »

La proposition H'_n est évidente pour $n = 1$ ou $n = 2$, il suffit d'expliciter le déterminant.

On suppose H'_{n-1} vrai pour $n \geq 3$ fixé. On écrit le déterminant pour une matrice de taille n :

$$\text{Det}(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & \cdots & -a_{1i} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2i} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{i1} & \cdots & x - a_{ii} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{ni} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

De même que précédemment, on note $M = xI_n - A$, M_{ij} la matrice obtenue en barrant dans la matrice M la i -ème ligne et la j -ème colonne, et A_{ij} la matrice obtenue en barrant dans la matrice A la i -ème ligne et la j -ème colonne

On développe $\text{Det}(xI_n - A)$ par rapport à la première colonne et on a :

$$\det(xI_n - a) = (x - a_{11}) \times \text{Det}(M_{11}) + \sum_{i=2}^n (-1)^{(i+1)} (-a_{i1}) \times \text{Det}(M_{i1}).$$

La matrice M_{11} est une matrice de taille $n - 1$, et $M_{11} = xI_{n-1} - A_{11}$.

On peut donc utiliser H'_{n-1} appliqué à la matrice A_{11} et l'on obtient :

$$\text{Det}(M_{11}) = \chi_{A_{11}}(x) = x^{n-1} - \text{tr}(A)x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} \det(A_{11}).$$

Pour $i \geq 2$, on constate que la première ligne de $\text{Det}(M_{i1})$ ne contient que des coefficients constants (indépendants de x). On développe alors $\text{Det}(M_{i1})$ par rapport à la première ligne, et en appliquant le lemme, on en déduit que $\text{Det}(M_{i1})$ est une fonction polynomiale de degré inférieure ou égal à $n - 2$ (calcul à expliciter...).

Ainsi : $\det(xI_n - a) = (x - a_{11}) \times (x^{n-1} - \text{tr}(A)x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} \det(A_{11})) + Q(x)$ où $\deg(Q) \leq n - 2$.

On peut alors conclure en examinant les termes de plus hauts degrés... ■

IV.2 Propriétés

Proposition 14 (Valeurs propres et polynôme caractéristique. (dem)) On suppose E de dimension finie.

Les valeurs propres d'un endomorphisme de E sont les racines de son polynôme caractéristique.

Les valeurs propres d'une matrice carrée A sont les racines de son polynôme caractéristique.

Remarque 5 On retrouve le fait qu'un endomorphisme d'un espace de dimension n (resp. une matrice carrée de taille n) a au plus n valeurs propres distinctes.

Exemple 14 Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

Proposition 15 (Matrices semblables et polynôme caractéristique. (dem))

Si deux matrices A et B sont semblables, alors elles ont le même polynôme caractéristique.

La réciproque est fautive.

Proposition 16 (Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont notés d_1, d_2, \dots, d_n . On a alors :

$$\chi_A(X) = (X - d_1)(X - d_2) \dots (X - d_n)$$

Dans le cas d'une matrice triangulaire, il est donc **inutile** de faire le moindre calcul pour en connaître le spectre !

Proposition 17 (Polynome caractéristique et matrice transposée. (dem))

Une matrice carrée et sa transposée ont le même polynome caractéristique.

Conséquence : une matrice carrée et sa transposée ont les mêmes valeurs propres.

Proposition 18 (Polynome caractéristique d'une matrice par blocs. (dem))

Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs, avec $\begin{cases} A \in M_p(\mathbb{K}), \\ B \in M_q(\mathbb{K}) \\ C \in M_{p,q}(\mathbb{K}) \end{cases}$.

Alors $\chi_M = \chi_A \times \chi_B$

Théorème 7 (Théorème de Cayley-Hamilton)

- Soit E de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors le polynome caractéristique de f annule f .
Autrement dit : si $P = \chi_f$ alors $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$. Le polynome caractéristique de A annule la matrice A .
Autrement dit : si $P = \chi_A$ alors $P(A) = 0$.

Démonstration non exigible.

Exemple 15 Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n . A l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, montrer que u est nilpotent si et seulement si $\text{Sp}(u) = \{0\}$

IV.3 Ordre de multiplicité des racines du polynôme caractéristique

Définition 6 1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, χ_A son polynôme caractéristique et $\lambda \in \text{Sp}(A)$.
On appelle **ordre de multiplicité de λ** l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme χ_A .

2. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, χ_f son polynôme caractéristique et $\lambda \in \text{Sp}(f)$.
On appelle **ordre de multiplicité de λ** l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme χ_f .

Proposition 19 (Matrice réelle et valeur propre complexe(dem))

Soit A une matrice carrée à coefficients réels. On suppose que A admet une valeur propre λ complexe, non réelle. Alors le conjugué $\bar{\lambda}$ est valeur propre de A avec le même ordre de multiplicité que λ .

Exemple 16 Prenons par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer les valeurs propres de A ainsi que leurs ordres de multiplicité.
Calculer ensuite la dimension des sous-espaces propres.

Théorème 8 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \text{Sp}(f)$, $V(\lambda)$ le sous-espace propre associé et m_λ l'ordre de multiplicité de λ .

$$\text{Alors : } 1 \leq \dim(V(\lambda)) \leq m_\lambda \leq n.$$

Preuve Posons $d = \dim(V(\lambda))$. On prend e_1, \dots, e_d une base de $V(\lambda)$ et l'on complète cette base en une base de E . La matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} \lambda I_d & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Donc $\chi_f(x) = \det \left(\begin{pmatrix} (x-\lambda)I_d & -B \\ 0 & xI_{n-d} - C \end{pmatrix} \right)$. On développe successivement le déterminant χ_A par rapport à la première colonne, puis par rapport à la deuxième etc et l'on obtient : $\chi_f(x) = (x-\lambda)^d \times \det(xI_{n-d} - C)$. Donc $d \leq m_\lambda$ (car on a $(x-\lambda)^d$ en facteur, et il est possible que λ soit aussi racine de $\det(xI_{n-d} - C)$).

L'inégalité $m_\lambda \leq n$ est immédiate car le polynôme caractéristique est de degré n .

Enfin, comme $\lambda \in \text{Sp}(f)$, le sous-espace propre associé n'est pas trivial et sa dimension vaut au moins 1. ■

On en déduit un théorème analogue pour les matrices :

Théorème 9 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $V(\lambda)$ le sous-espace propre associé, m_λ l'ordre de multiplicité de λ .

$$\text{Alors : } 1 \leq \dim(V(\lambda)) \leq m_\lambda \leq n.$$

Remarque 6 On en déduit que : si λ est une valeur propre de multiplicité 1 de f (resp. de A), alors le sous-espace propre associé est de dimension 1.

Remarque 7 Si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme (resp. d'une matrice) est scindé à racines simples, alors cet endomorphisme (resp. matrice) est diagonalisable.

Remarque 8 Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres avec mêmes ordres de multiplicité.

Théorème 10 Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si χ_f est **scindé** et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est **scindé** et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

V En pratique : diagonaliser une matrice ou un endomorphisme....

Pour diagonaliser une matrice, on cherche les valeurs propres, puis une base de chaque sous-espace propre. La matrice sera diagonalisable SSI chaque SEP a pour dimension l'ordre de multiplicité de la valeur propre considérée.

Ou encore : on sait que la matrice sera diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme f canoniquement associé est diagonalisable, c'est à dire si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres vaut E , ce qui revient à dire que la somme des dimensions vaut n .

En prenant la réunion des bases des sous-espaces propres, on obtient une base de diagonalisation de f , donc une matrice P telle que $P^{-1}MP = D$ (la matrice P étant la matrice de passage de la base canonique vers la base de diagonalisation).

Concrètement, les éléments de cette base de diagonalisation sera représentés par des matrices colonnes X_1, \dots, X_n et l'on aura $P = (X_1 \dots X_n)$.

Exemple 17 Etudier si la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et, si oui, la diagonaliser.

Exemple 18 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exemple 19 Soit $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{C}^5$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que

$$M = \begin{pmatrix} a & c & d \\ 0 & a & e \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \text{ soit diagonalisable.}$$

VI Diagonalisabilité et polynomes annulateurs

Théorème 11 (admis)

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il admet un polynome annulateur scindé à racines simples.

Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynome annulateur scindé à racines simples.

Exemple 20 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E , tel que $f^2 - 3f + 2id_E = 0$.
Peut-on affirmer que f est diagonalisable ?

Proposition 20 (Endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable. (dem))

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

Proposition 21

Un endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si il admet $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)$ comme polynome annulateur.

VII Trigonalisation

VII.1 Introduction : définition, propriétés

Définition 7 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **trigonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire. Une telle base est alors appelée **base de trigonalisation de f** .

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **trigonalisable** lorsqu'il existe une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui soit semblable à A , c'est à dire qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = T$.

Remarque 9 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les deux phrases suivantes sont équivalentes :

- Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
- Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les deux phrases suivantes sont équivalentes :

- A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
- A est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

3. Une matrice diagonalisable est *a fortiori* trigonalisable. Idem pour les endomorphismes...

4. Une matrice est trigonalisable si c'est la matrice d'un certain endomorphisme trigonalisable.

5. Supposons que $f \in \mathcal{L}(E)$ soit trigonalisable. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure : $T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$. Alors le polynôme caractéristique vaut $\chi_f(x) = \prod_{k=1}^n (x - t_{kk})$ et il est donc scindé. Nous admettrons la réciproque.

De même : si A est trigonalisable, on montre sans peine que son polynôme caractéristique est scindé. Nous admettrons la réciproque.

Théorème 12 (admis)

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. En particulier, tout endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel est trigonalisable (dans \mathbb{C}).
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. En particulier, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), P^{-1}AP = T \text{ où } T \text{ est triangulaire supérieure}$$

Remarque 10 Une matrice peut être trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ne pas l'être dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: par exemple si le polynôme caractéristique de A admet des racines complexes non réelles.

Proposition 22 1. Soit f un endomorphisme trigonalisable d'une espace vectoriel E . On suppose que $\text{Sp}(f) = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_r \}$ et m_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i . Alors :

- $\det(f) =$
- $\text{Tr}(f) =$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice trigonalisable. On suppose que $\text{Sp}(A) = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_r \}$ et m_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i . Alors :

- $\det(A) =$
- $\text{Tr}(A) =$

VII.2 Comment trigonaliser une matrice 3×3 (non diagonalisable) admettant une valeur propre simple et une valeur propre double

On suppose que A admet une valeur propre simple α et une valeur propre double β .

- On détermine un vecteur propre associé à la valeur propre α .
- On détermine un vecteur propre X_2 associé à la valeur propre β .
- Comme X_1 et X_2 sont associés à des valeurs propres différentes, ils forment une famille libre. On complète en une base (X_1, X_2, X_3) de \mathbb{K}^3 .
- Il existe des scalaires a, b, c tels que $AX_3 = aX_1 + bX_2 + cX_3$.
- On appelle P la matrice dont les colonnes sont X_1, X_2, X_3 .

★ Première méthode : On a alors : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & a \\ 0 & \beta & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Le calcul du polynôme caractéristique de A nous montre que $c = \beta$. Il faut donc seulement chercher a et b tels que $AX_3 = aX_1 + bX_2 + \beta X_3$.

- Au lieu de prendre X_3 « au hasard », on peut imposer que AX_3 soit combinaison linéaire de X_2 et X_3 (c'est à dire $a = 0$). Cela nous donnera alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & b \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

Si cela doit vous faciliter les calculs par la suite, l'énoncé devrait vous le suggérer.

- ★ Deuxième méthode : On a $P^{-1}AP = T \iff AP = PT$ et donc la troisième colonne de AP est égale à la troisième colonne de PT .

Or la troisième colonne de PT est égale à $P(T)_3$ où $(T)_3$ est la troisième colonne de T .

On écrit donc a priori la 3e colonne de T : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Puis on cherche a, b et c tels que $A(P)_3 = P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exemple 21 Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (est-elle diagonalisable?)

VII.3 Comment trigonaliser une matrice 3×3 (non diagonalisable) admettant une valeur propre triple λ et dont l'espace propre est de dimension 2

Comme l'espace propre est de dimension 2, on peut en trouver une base (X_1, X_2) . On complète en une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ en prenant n'importe quel X_3 qui n'est pas combinaison linéaire de X_1 et X_2 .

On a donc : $AX_1 = \lambda X_1$, $AX_2 = \lambda X_2$.

Il ne reste qu'à calculer a, b, c tels que $AX_3 = aX_1 + bX_2 + cX_3$ (c'est possible car (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$).

En posant $P = [X_1|X_2|X_3]$, on a : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \lambda & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

En fait, en regardant cette matrice, on se rend compte que l'on aura nécessairement $c = \lambda$ (il suffit de regarder le polynôme caractéristique).

VIII Applications de la diagonalisation et de la trigonalisation

1. Calcul des puissances n -ièmes d'une matrice

si $P^{-1}AP = D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors par récurrence on a :

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \times \text{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)P^{-1}$$

2. Suites satisfaisant une récurrence linéaire simultanée (ou croisée)

Exemple : On pose $u_0 = 0, v_0 = 22, w_0 = 22$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4} (2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3} (u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4} (u_n + v_n + 2w_n) \end{cases}$$

Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n . Etudier la convergence de ces trois suites.

On note $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

On a alors $X_{n+1} = AX_n$ puis par récurrence : $X_n = A^n X_0$. On est donc ramené au calcul de la puissance n ème de A .

Calcul du polynôme caractéristique : $\chi_A(x) = \dots = (x-1)(x-(1/12))(x-(1/4))$. Comme A a 3 valeurs propres distinctes, A est diagonalisable.

Après calcul, on obtient comme matrice de diagonalisation : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Puis $P^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

D'où $\forall n, X_n = A^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0 = \dots$ et enfin

$$u_n = 14 - 11 * 4^{-n} - 3 * 12^{-n}, v_n = 14 + 8 * 12^{-n}, w_n = 14 + 11 * 4^{-n} - 3 * 12^{-n}.$$

Les 3 suites convergent vers 14.

On peut imaginer des exemples plus subtils, par exemple en laissant u_0, v_0, w_0 en paramètres et en demandant pour quelles valeurs de ces paramètres les suites convergent...

3. Etude de suites satisfaisant une récurrence linéaire à coefficients constants.

Pour les suites satisfaisant une récurrence linéaire d'ordre 2, on a des formules.

Exemple 22 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0, u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -6u_n - 11u_{n+1} - 6u_{n+2} \end{cases}$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Alors la récurrence s'écrit : $X_{n+1} = AX_n$ avec $A =$

Déterminer une expression de u_n en fonction de n .

Exemple 23 Considérons la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 4u_n - 8u_{n+1} + 5u_{n+2} \end{cases}$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Alors $X_{n+1} = AX_n$ avec $A =$

Le calcul du polynôme caractéristique donne : $\chi_A(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)^2(x-1)$.

Un calcul rapide donne $E_2 = \text{vect}(U)$ où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \text{vect}(V)$ où $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A est-elle diagonalisable ?

Déterminer une expression de u_n en fonction de n .

4. La diagonalisation/trigonalisation peut servir pour résoudre des systèmes d'équations différentielles (mais ce n'est plus à votre programme).

IX Bilan (partiel) outils

Faites attention à la question posée! Parfois on voit des étudiants faire de longs calculs inutiles...

Faites attention : certaines conditions sont des **conditions suffisantes**, d'autres sont **nécessaires et suffisantes**.

Je fais ici un petit recueil des outils pour les matrices. Il y a les mêmes pour les endomorphismes.

- **Outils pour trouver le spectre de A**

- ★ Voir si il n'y a pas des valeurs propres « évidentes » ou suggérées par l'énoncé.
- ★ Voir si une des colonnes de A est nulle.
- ★ Si la matrice est triangulaire, les valeurs propres sont les éléments diagonaux
- ★ Calculer le polynôme caractéristique.
- ★ Si on connaît un polynôme annulateur de A , les valeurs propres de A sont nécessairement racines de ce polynôme.
- ★ La trace de A est égale à la somme des valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité). Utilisable si on connaît déjà des valeurs propres de A

- **Outils pour savoir si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. un endomorphisme f de E , de dimension n) est diagonalisable.**

- ★ Si A a n valeurs propres **distinctes**, alors A est diagonalisable.
- ★ Si χ_A est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable.
- ★ Si A est semblable à une matrice diagonalisable, elle est diagonalisable.
- ★ A diagonalisable \iff la somme des dimensions des SEP vaut n .
- ★ f diagonalisable \iff la somme des SEP vaut E .
- ★ A est diagonalisable \iff il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que : P est scindé à racines simples et $P(A) = 0$.

$$\star A \text{ est diagonalisable} \iff \left(P(A) = 0 \text{ avec } P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda) \right) \iff \left(\prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (A - \lambda I_n) = 0 \right)$$

$$\star A \text{ est diagonalisable} \iff \left\{ \begin{array}{l} \chi_A \text{ est scindé} \\ \text{et pour toute valeur propre de } A \\ \dim(\text{Ker}(A - \lambda I_n)) = \text{ordre de multiplicité de } \lambda \end{array} \right\}$$

- **Outils pour diagonaliser une matrice** : trouver les valeurs propres de A puis chercher les sous-espaces propres.

- **Outils pour savoir si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. un endomorphisme f de E , de dimension n) est trigonalisable.**

- ★ Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{K} .
- ★ Toute matrice est trigonalisable dans \mathbb{C} .

- **Outils pour trigonaliser une matrice** : savoir travailler sur les cas indiqués dans le paragraphe correspondant. Si c'est plus compliqué, l'exercice comportera une indication.