1 Réduction des endomorphismes

Exercice 1 Soit φ, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(x,y) = \left(\frac{7}{3}x + \frac{2}{3}y, \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}y\right)$.

1. On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Préciser la matrice M de φ dans la base $\mathcal{C}$.
2. Quel est le spectre de φ ? Donner une base de chaque sous-espace propre.
3. On pose $\mathcal{B} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ où $\vec{f_1} = (2,-1)$ et $\vec{f_2} = (1,1)$. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Calculer la matrice D de φ dans cette base $\mathcal{B}$. Quel lien y-a-t-il entre M et D ?
4. Calculer D^n puis M^n pour tout entier $n \geq 0$.
5. φ est-elle bijective ? Si oui, expliciter φ^{-1}.
6. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$, puis pour tout $n \geq 0$: $\left\{\begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & \frac{7}{3}u_n & + & \frac{2}{3}v_n \\ v_{n+1} & = & \frac{1}{3}u_n & + & \frac{8}{3}v_n \end{array}\right.$

   En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, établir un lien entre X_{n+1} et X_n, puis entre X_n et X_0.
   En déduire les expressions de u_n et v_n. Les suites sont-elles convergentes ?

Exercice 2 Déterminer les valeurs propres et des bases des sous-espaces propres des endomorphismes canoniquement associés aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -6 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\delta(P) = P(X) - P(X-1)$.
Décrire le noyau et l'image de Δ. Donner le spectre de Δ et préciser si c'est un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 4 Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Montrer que f est diagonalisable. Que dire de f ?

Exercice 5 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'application qui à toute matrice A de E associe $u(A) = A^T$ où A^T désigne la transposée de A. Montrer que u est diagonalisable et déterminer une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de u.

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E vérifiant :

$$f^3 - f^2 + f - id_E = 0.$$

1. Que dire des valeurs propres de f ? On distinguera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
2. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

Exercice 7 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Enfin, soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$.

On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$.

1. Démontrer que : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f),\ P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(f))$.
2. Soit R un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$ tel que $R(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Que dire des valeurs propres de f ?
3. On dit qu'un endomorphisme g est nilpotent si : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $g^k = 0$.
   Soit $g \in \mathcal{L}(E)$; on suppose g nilpotent. Montrer que : g est diagonalisable si et seulement si $g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 8 (Oral) Soit a un réel donné. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'application définie sur E par

$$f(P) = (X-a)(P' + P'(a)) - 2(P - P(a))$$

Vérifier que f est bien un endomorphisme de E. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 9 (Oral) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, Id_E l'identité de E, f un endomorphisme de E tel que :

$$(f - Id_E)^3 \circ (f + 2Id_E) = 0 \quad \text{et} \quad (f - Id_E)^2 \circ (f + 2Id_E) \neq 0$$

1. Déterminer les valeurs propres **possibles** de f.
2. Montrer que f n'est pas diagonalisable.

Exercice 10 Soit E l'ensemble des suites réelles.
Pour toute suite (u) de E, on définit la suite $v = T(u)$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme T.

Exercice 11 Commutant d'un endomorphisme à valeurs propres simples.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que f est diagonalisable et qu'il possède n valeurs propres distinctes : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. Montrer que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g.
2. En déduire qu'il existe une base commune de vecteurs propres pour f et g.
3. Montrer qu'il existe un unique n–uplet $(a_0, \dots, a_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $g = a_0 id + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.
4. Déterminer la dimension du commutant de f.

***__Exercice 12__** Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de l'endomophisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$f(P) = (X+1)(X-3)P' - XP.$$

Indication : On pourra examiner les termes de plus haut degré et se demander quel est le degré possible d'un polynôme qui est vecteur propre.

Exercice 13 Soit $E = \mathbb{R}^5$, muni de sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ et φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall i \in [\![1, 5]\!], \varphi(e_i) = 2^{i-1} e_{6-i}$$

1. Déterminer $\varphi \circ \varphi$.
2. φ est-il diagonalisable ?

2 Réduction des matrices carrées

Exercice 14 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre. (NB : il y a deux valeurs propres). Diagonaliser A si c'est possible (en le justifiant).

Exercice 15 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Chercher les valeurs propres et vecteurs propres de A.
2. A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice de passage diagonalisant A, puis calculer $P^{-1}AP$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer A^n.

Exercice 16 Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de A. Diagonaliser A.

Exercice 17 Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ sont diagonalisables.

La matrice $A.B$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 18 Calculer A^n, avec $n \in \mathbb{N}$, sachant que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 19 1) Rechercher les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ puis diagonaliser, si possible, A. En déduire A^n où $n \in \mathbb{N}$.
2) Rechercher les valeurs propres puis diagonaliser si possible les matrices B et C suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 20 Soit $u_0 = 1,\ v_0 = 1,\ w_0 = -1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & 2u_n + 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} & = & -u_n + w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n + v_n \end{cases}$$

Calculer $u_n,\ v_n$ et w_n en fonction de n.

Exercice 21 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A puis trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$.

Exercice 22 Trouver toutes les matrices B de taille 3 telles que $B^2 = A$, avec $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
Indication : diagonaliser A.....

Exercice 23 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$

1. Calculer le produit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ lorsque $x + y + z = 0$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que M soit diagonalisable.

Exercice 24 Sans calcul, donner deux vecteurs propres et deux valeurs propres associés de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 25 Expliquer sans calcul, pourquoi $\begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 26 La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 27 Soit J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Soit V la matrice colonne de taille n dont tous les coefficients valent 1. Calculer JV.
Montrer que J est diagonalisable et donner une matrice D diagonale semblable à J.

Exercice 28 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 29 Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 30 Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Attention : ruse qui n'a pas grand chose à voir avec le chapitre en cours

Exercice 31 Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 1 & 1/a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 32 Déterminer pour quels $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 33 Polynome caractéristique d'un produit.
Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. l'objectif de l'exercice est de démontrer que AB et BA ont le même polynome caractéristique.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que A est inversible.
   Montrer que AB et BA sont semblables. Conclusion ?
2. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres. Cela permet-il de conclure ?
3. Dans cette question, on suppose que $A = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $r \leqslant n$
   En décomposant la matrice B par blocs, démontrer le résultat.
4. Cas général : On note $r = rg(A)$.
   Montrer qu'il existe deux matrices P et Q inversibles telles que $PAQ = J_r$.
   Démontrer le résultat.

Exercice 34 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + A + 4I_n = 0$.

1. Montrer que A n'a pas de valeur propre réelle.
2. Montrer que n est nécessairement pair.
3. Calculer le déterminant et la trace de A.

Exercice 35 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\chi_A(0) \neq 0$.
Justifier que A est inversible. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A.

Exercice 36 $\star\star\star$ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$.

1. Les matrices A et A^2 sont elles diagonalisables dans $\mathbb{C}$? Dans $\mathbb{R}$?
2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 37 Matrice circulante.
Soient

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de J. En déduire la valeur de J^n.
2. La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
3. Calculer J^k pour k plus petit que n.
4. Trouver un polynôme P tel que $P(J) = A$.
5. En déduire la valeur du déterminant de A.

Exercice 38 On considere la matrice de taille n : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & ..... & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynome caractéristique de A. En déduire A^n.
2. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 39 Pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, on considère la matrice

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices $M(a, b, c)$ commutent entre elles.
2. Montrer que ces matrices ont une base de diagonalisation commune (on pourra chercher à écrire $M(a, b, c) = aI_n + bJ + cJ'$ où J et J' sont des matrices que l'on pourra étudier...)
3. Donner les éléments propres de ces matrices.

Exercice 40 Diagonalisation par blocs.
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix}$.

1. Étude du cas où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que A est diagonalisable ; donner ses valeurs propres.
   (b) Montrer que 0 est valeur propre de B et donner la dimension de l'espace propre associé.
   (c) Soit λ une valeur propre de A, associée à un vecteur propre X. Trouver un vecteur propre de B.
   (d) La matrice B est-elle diagonalisable ?
2. Reprendre les questions précédentes dans le cas où A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang n. On traitera le cas où A possède n valeurs propres distinctes, puis le cas où A possède des valeurs propres multiples.

3 Trigonalisation

Exercice 41 Trigonaliser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 42 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres. Sont-elles diagonalisables ? Sont-elles semblables ? Les diagonaliser ou les trigonaliser, selon ce qui est possible...

Exercice 43 Soit α un nombre complexe. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 3 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle diagonalisable ? Trigonaliser A dans le cas où elle n'est pas diagonalisable.

Exercice 44 Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 45 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Construire une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 46 $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 5 \\ 10 & 7 & 4 & 9 \\ 9 & 6 & 4 & 8 \\ -15 & -9 & -5 & -12 \end{pmatrix}$

On admet que le polynome caractéristique de A est $(X-1)^2(X-2)^2$.

Construire une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & * & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Valeurs numériques données :

$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 & 8 \\ 21 & 9 & 11 & 19 \\ 21 & 9 & 11 & 19 \\ -30 & -12 & -16 & -27 \end{pmatrix}$

Exercice 47 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe une base dans laquelle u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (on pourra s'intéresser à la matrice $B = A - 2I_3$).

4 Divers

Exercice 48 Soit $a > 0$ et $S_a : \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'application qui à f associe $S_a(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt$.

1. Soit $f : t \mapsto \sin(\pi t/a)$. Calculer $S_a(f)$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $S_a(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Montrer que S_a n'est ni injective ni surjective.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que S_a induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, noté s_a.
5. Montrer que s_a est un automorphisme.
6. Montrer que dans une base bien choisie, la matrice de s_a est triangulaire supérieure.
7. L'endomorphisme de s_a est-il diagonalisable ?

Exercice 49 Montrer que deux matrices carrées semblables ont le même polynôme caractéristique.
Montrer de plus que : si A et B sont semblables, et si $\lambda \in$Sp(A), alors les sous-espace propres $\ker(A - \lambda I_n)$ et $\ker(B - \lambda I_n)$ ont même dimension.
Si deux matrices ont le même polynôme caractéristique, sont-elles nécessairement semblables ?

Exercice 50 Approfondissement : Soit A une matrice réelle. Il peut arriver que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ne le soit pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par exemple si le spectre de A est vide dans $\mathbb{R}$ (le polynôme caractéristique n'a pas de racine réelle).
En revanche, si le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ (les valeurs propres de A sont toutes réelles), alors : (A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) $\iff$ (A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
Autrement dit : $(\exists Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}AQ = D \in \mathcal{D}_n(R)) \iff (\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D)$.
Il est clair que : si il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, alors $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.
Autrement dit : (A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) $\Rightarrow$ (A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
La réciproque est moins triviale. C'est un exercice classique.
Supposons que : $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Comme on a supposé que toutes les valeurs propres étaient réelles, la matrice D est une matrice réelle. Ecrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices réelles. On a alors : $AP = PD \Rightarrow A(R+iS) = (R+iS)D$ donc, les matrices A et D étant réelles, on en déduit que $AR = RD$ et $AS = SD$.
Montrer qu'il existe un réel x tel que $R + xS$ soit inversible. Puis conclure.....
Remarque : on pourra montrer que la fonction ($x \mapsto$det$(R + xS)$) est une fonction polynomiale de degré au plus n.

5 Exercices d'oral

Exercice 51 Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 52 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.
M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 53 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 54
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

Exercice 55 Soit n un entier naturel non nul.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

Exercice 56 On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, A)$.

Exercice 57 Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
   Indication : penser à utiliser le déterminant.

Exercice 58

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall\, M \in E$, $u(M) = M + \operatorname{tr}(M)A$.

   (a) Prouver que le polynome $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.

   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).