Suites et séries de fonctions

Table des matières

I Suites de fonctions	2
I.1 Convergence simple	2
I.2 Convergence uniforme	2
I.2.a Norme	2
I.2.b Convergence uniforme d'une suite de fonctions	2
I.3 Continuité d'une limite uniforme	3
I.4 Intégration et passage à la limite : cas d'un segment	3
I.5 Dérivation	3
II Séries de fonctions	4
II.1 Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale	4
II.2 Continuité d'une série de fonction	5
II.3 Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment	5
II.4 Dérivation de la somme d'une série de fonctions	5
II.5 Théorème de la double limite	6

I Suites de fonctions

I.1 Convergence simple

Définition 1 (Convergence simple) Soit I un intervalle non vide.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et soit f une fonction elle aussi définie sur I .

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge simplement** vers la fonction f sur I lorsque :

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Exemple 1 $\forall n \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Exemple 2 $\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} \forall x \in [0; \frac{1}{n}[& f_n(x) = 1 - nx \\ \forall x \in [\frac{1}{n}; 1] & f_n(x) = 0 \end{cases}$

Exemple 3 $\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} f_n(x) = 2n^2x & \text{si } x \in [0; \frac{1}{2n}[\\ f_n(x) = 2n - 2n^2x & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}; \frac{1}{n}[\\ f_n(x) = 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}; 1] \end{cases}$

I.2 Convergence uniforme

I.2.a Norme

Définition 2 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit N une application de E dans $\mathbb{R}^+$.

On dit que N est une norme lorsque :

- $\forall \vec{u} \in E, N(\vec{u}) = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
- $\forall \vec{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda \vec{u}) = |\lambda|N(\vec{u})$
- $\forall (\vec{u}, \vec{w}) \in E^2, N(\vec{u} + \vec{w}) \leq N(\vec{u}) + N(\vec{w})$ (inégalité triangulaire).

Exemple 4 $N : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \vec{u} = (x, y, z) & \mapsto N(u) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$ est une norme sur $\mathbb{R}^3$ (norme euclidienne).

Proposition 1 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

- Soit E l'espace des fonctions définies sur I , à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de plus bornées.
Alors E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- L'application $\|\cdot\|_\infty : f \rightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} \{|f(x)|\}$ est une norme.

Remarque 1 On note aussi $\|f\|_\infty = \sup_I |f|$

Définition 3 L'application $\|\cdot\|_\infty$ est appelée **norme uniforme** sur l'espace des fonctions bornées sur I

I.2.b Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 4 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I et soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$.

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers la fonction f sur I lorsque les fonctions $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Exemple 5 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1] f_n(x) = x^n(1 - x)^n$

Proposition 2 (Lien entre convergence simple et convergence uniforme.)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I et soit f une fonction elle aussi définie sur I .

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , alors elle converge aussi simplement vers f .

La réciproque est fautive.

I.3 Continuité d'une limite uniforme

Proposition 3 (Continuité d'une limite uniforme (dem).)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I .

On suppose que :

- la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction f .
- toutes les fonctions f_n sont continues sur I .

Alors la fonction f est continue sur I .

Exemple 6 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2}$

Montrer que la convergence sur $\mathbb{R}$ n'est pas uniforme, mais que la convergence sur tout segment $[a; b]$ est uniforme. Quelle conclusion sur la continuité ?

Proposition 4 (Continuité d'une limite uniforme, version sur tout segment.) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I .

On suppose que :

- la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$ vers une fonction f .
- toutes les fonctions f_n sont continues sur I .

Alors la fonction f est continue sur I .

I.4 Intégration et passage à la limite : cas d'un segment

Exemple 7 On reprend l'exemple 3 :
$$\begin{cases} f_n(x) = 2n^2x & \text{si } x \in [0; \frac{1}{2n}[\\ f_n(x) = 2n - 2n^2x & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}; \frac{1}{n}[\\ f_n(x) = 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Comparer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ et $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$. Conclusion ?

Proposition 5 (Intégrale d'une limite uniforme sur un segment (dem).)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$.

On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

I.5 Dérivation

Proposition 6 (Dérivabilité de la limite (dem).)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I

On suppose que :

- La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .
- La suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction h

Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, et sa dérivée est $f' = h$.

De plus, la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment de I .

La conclusion reste valable si la convergence de la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme sur tout segment $[a, b] \subset I$.

Proposition 7 (Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle I . On suppose que :

- Pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$, la suite $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement .
- La suite $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément (sur tout segment inclus dans I).

Alors la fonction f (limite simple des f_n) est de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, p\}$ on a

$$f^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}$$

II Séries de fonctions

II.1 Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale

Définition 5 (Convergence simple d'une série de fonctions)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction S lorsque :

$$\text{pour tout } x \in I, \text{ la série numérique } \sum f_n(x) \text{ converge vers } S(x).$$

Exemple 8 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1; 1[, f_n(x) = x^n$. Convergence simple de $\sum f_n$?

Exemple 9 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Convergence simple de $\sum f_n$?

Définition 6 (Convergence uniforme d'une série de fonctions)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction S lorsque :

$$\text{la suite des sommes partielles } (S_n) \text{ converge uniformément vers } S$$

Exemple 10 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$. Convergence uniforme de $\sum f_n$?

Exemple 11 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1; 1[, f_n(x) = x^n$. Convergence uniforme de $\sum f_n$?

Proposition 8 (Lien entre convergence simple et convergence uniforme (dem).)

Si une série de fonctions converge uniformément vers une fonction S , alors elle converge simplement vers S .

La réciproque est fausse.

Définition 7 (Convergence normale)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et bornées sur un intervalle I

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement vers la fonction S lorsque :

$$\text{la série numérique } \sum \|f_n\|_\infty \text{ est convergente.}$$

Exemple 12 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$. Convergence normale de $\sum f_n$?

Exemple 13 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = x^2 e^{-nx}$. Convergence normale de $\sum f_n$?

Proposition 9 (Lien entre convergence normale et convergence uniforme (dem).)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions.

Si la série $\sum f_n$ converge normalement, alors elle converge uniformément vers une fonction S .

La réciproque est fausse.

II.2 Continuité d'une série de fonction

Exemple 14 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], f_n(x) = x^n - x^{n+1}$.

Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction S . La fonction S est-elle continue sur $[0, 1]$?

Proposition 10 (Continuité de la somme d'une série de fonctions (dem).)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I . On suppose que :

- Chaque fonction f_n est continue sur I .
- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I

Alors la somme S de la série de fonctions est continue sur I

Exemple 15 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{e^{inx}}{n^2}$.

Proposition 11 Continuité de la somme d'une série de fonctions, (version convergence uniforme sur tout segment)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I . On suppose que :

- Chaque fonction f_n est continue sur I .
- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I

Alors la somme S de la série de fonctions est continue sur I

Exemple 16 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$.

Montrer que $\sum f_n$ converge simplement. On note S sa somme. La fonction S est-elle continue sur $]0; +\infty[$?

II.3 Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment

Proposition 12 (Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment (dem).)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions **continues** sur un segment $[a; b]$ (i.e. chaque fonction f_n est continue sur I).

Si la série de fonctions converge **uniformément** vers une fonction S , alors :

- La série numérique $\sum \left(\int_a^b f_n \right)$ converge.
- Et on a l'égalité : $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t) dt$

Exemple 17 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0; 1], f_n(x) = \frac{(-x \ln(x))^n}{n!}$ et $f_n(0) = 0$. Illustrer le résultat précédent avec $\sum f_n$.

II.4 Dérivation de la somme d'une série de fonctions

Proposition 13 (Dérivation de la somme d'une série de fonctions (dem).)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge **simplement** vers une fonction S sur I .
- La série de fonctions $\sum f'_n$ converge **uniformément** sur tout segment de I .

Alors la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée S' vaut $S' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$

Proposition 14 (Extensions aux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- Pour tout entier $k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction S sur I .
- La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors la fonction S est de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ sa dérivée d'ordre k $S^{(k)}$ vaut

$$S^{(k)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$$

Exemple 18 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 1, f_n(x) = \frac{1}{n^x}$. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement. On note S sa somme. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donner l'expression de la dérivée d'ordre k sous la forme d'une série.

II.5 Théorème de la double limite

Théorème 1 (Théorème de la double limite (admis)) Supposons que :

- une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I
- pour tout n , f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie),

Alors sous ces hypothèses :

- la série $\sum \ell_n$ converge,
- la somme de la série admet une limite en a

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Autrement dit, sous réserve de convergence uniforme sur I , $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$.

Exemple 19 La convergence uniforme sur l'intervalle $[2, +\infty[$ permet grâce à ce théorème de calculer la limite en $+\infty$

de la fonction zêta : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$.

Il permet aussi de prouver que la convergence de cette même série ne peut être uniforme sur un intervalle de la forme $]1, \alpha]$ avec $\alpha > 1$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$. S'il y avait convergence uniforme, la série $\sum \frac{1}{n}$ convergerait, ce qui n'est pas le cas.