

Partie 1 : Exercices pour les TD

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_n(x) = \exp\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)$.

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la suite de fonctions (f_n) est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $] -\infty, b]$ où $b \in \mathbb{R}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Etudier la convergence simple, et uniforme de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$$

Exercice 3 Etudier la convergence simple, et uniforme de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 + x^{2n}}$$

Exercice 4 Etudier la convergence simple, et uniforme de la suite de fonctions définies sur $]0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{x}\right)$$

Exercice 5 Etudier la convergence simple, et uniforme de la suite de fonctions définies sur $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = nx^n(1 - x)$$

Préciser la convergence uniforme sur les segments de la forme $[0; a]$ avec $0 < a < 1$.

Exercice 6 On définit une suite de fonctions (f_n) par :

$$\forall x \in [0; 2], f_0(x) = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 2], f_{n+1}(x) = \sqrt{2 + f_n(x)}$$

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions.
2. Démontrer que chaque fonction f_n est croissante, puis étudier la convergence uniforme.

Exercice 7 (Suite de fonctions et dérivation)

Pour tout entier n non nul, et pour tout réel x , on pose $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$.

Etudier la convergence uniforme de (f_n) .

Les fonctions (f_n) sont-elles dérivables ? A-t-on la convergence de la suite des (f'_n) ?

Exercice 8 Pour $x \in [0; 1]$, on pose : $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$

1. Déterminer f la limite simple de (f_n) .
2. Etudier la convergence uniforme de (f_n) .
3. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$; puis comparer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ et $\int_0^1 f(t) dt$.

Exercice 9 Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{x^2 - nx + n^2}$.

Etudier le type de convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 10 Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général $f_n : t \mapsto 1/(1 + (nt)^2)$.

Montrer que la somme est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

Exercice 11 Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est définie sur $]0, +\infty[$.

L'application S est-elle continue ? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 12 On pose $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de la somme de la série de terme général f_n .
2. (a) Etudier les variations de la fonction f_n pour n fixé.
(b) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
(c) Calculer la somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
3. La somme S est-elle continue sur D ?

Exercice 13 Pour $x > 0$, calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{x+1}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x}{n^{x+1}}$. (Penser à un théorème du cours)

Exercice 14

1. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, existence et calcul de $I(p, q) = \int_0^1 x^p (\ln(x))^q dx$.

Indication : pour le calcul, on pourra montrer que : $I(p, q+1) = -\frac{q+1}{p+1} \times I(p, q)$ puis en déduire $I(p, q)$ en fonction de $I(p, 0)$ puis ...

2. Montrer que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$

Exercice 15

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
En déduire l'expression de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Partie 2 : Exercices d'oral

Exercice 16

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g .
2. On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.
 - (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .
 - (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
 - (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
 - (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 17

On pose $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$.

Exercice 18

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f , et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0 , avec $x_0 \in [a, b]$.
Démontrer que f est continue en x_0 .
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1], g_n(x) = x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

Exercice 19

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice 20 On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0, 1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 21 Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication suivante :

$$\left(\text{la série } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A \right) \Rightarrow \left(\text{la suite } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A \right)$$

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.
 $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$? Justifier.

Exercice 22

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^4 x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

$$\text{On pose alors : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

- (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

$$\sum_{n \geq 1} f_n \text{ converge-t-elle normalement sur } [a, b] ? \text{ sur } [a, +\infty[?$$

- (c) $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.