Partie 1 : Exercices pour les TD

Recherche du rayon de convergence d'une série entière

** **Exercice 1** Si a_n désigne la n-ème décimale de π, quel est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?
Est-ce que la réponse aurait été différente si a_n avait été la n-ème décimale de $\sqrt{3}$?

***Exercice 2** Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n n^2}{(n^2+1)2^n} z^n \text{ où } z \in \mathbb{C}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{sh}^2(n)} x^{2n} \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

***Exercice 3** Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ des suites telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq |b_n| \leq |c_n|$. On suppose que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ ont le même rayon R. Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum b_n z^n$?

****Exercice 4** Soit a_n le nombre de diviseurs de n. Quel est le rayon de la série entière $\sum a_n z^n$? Indication : encadrer a_n puis utiliser l'exercice précédent.

****Exercice 5** Comparer les rayons de convergence R_1 de $\sum a_n z^n$ et R_2 de $\sum a_n^2 z^n$.

***Exercice 6** On considère la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \ln\left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)$.
Déterminer son rayon de convergence

***Exercice 7** On pose $a_n = \dfrac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1}$ pour $n \geq 1$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$.
Moins simple, mais pas inabordable : Prouver qu'il y a convergence en tout point du cercle d'incertitude.

*****Exercice 8** Soit (a_n) une suite de réels positifs qui tend vers 0 en décroissant. On suppose que $\sum a_n$ diverge.

1. Montrer que le rayon de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1. On note f la somme de cette série entière.
2. Etablir que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

Développement d'une fonction en série entière

***Exercice 9** Développer en série entière la fonction $(x \mapsto \sin^2(x)\cos(x))$.

* **Exercice 10** 1) Donner le développement en série entière de la fonction Arctan. Quel est le rayon de convergence R de cette série entière ? Le développement est-il valable sur $]-R, R[$?
2) Déterminer le domaine de convergence et la valeur de la somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$.

** **Exercice 11** Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{1+x^2}\right)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et calculer ledit développement...

* **Exercice 12** Développer en série entière la fonction définie par : $f(x) = \ln(1 + x - 2x^2)$.

* **Exercice 13** Donner le développement en série entière : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)$.

*** **Exercice 14** On considère la fonction $\left(F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\cos^2(t)} dt.\right)$

1. Soit $x \in]-1,1[$ et soit $t \in [0, \pi/2]$. Montrer que, pour tout entier $N \geq 1$, on a :
$$\frac{1}{1 - x\cos^2(t)} = \sum_{n=0}^{N-1} (x\cos^2(t))^n + x^N \frac{\cos^{2N}(t)}{1 - x\cos^2(t)}.$$
2. En déduire que, pour tout réel $x \in]-1,1[$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n$ où W_n est une intégrale que l'on déterminera.
3. Etablir que, pour tout $x \in]-1,1[$, $F(x) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$. (On pourra poser $u = \tan(t)$ en le justifiant soigneusement)
4. Déterminer la valeur de W_n.

*** **Exercice 15** Soit $f(x) = \dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. En supposant que f admet un développement en série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon R, montrer que ce développement est de la forme : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.
2. Montrer que f vérifie une équation différentielle du premier ordre, et en déduire des relations entre les coefficients potentiels a_n.
3. Montrer que, si un DSE existe, alors $a_n = \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.
4. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ où $a_n = \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$? Que peut-on en déduire ?
5. Déduire de ce qui précède la valeur de : $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

♡* **Exercice 16** Soit $f \ : \ x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1+x}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0, puis déterminer son développement.

Calculs de sommes

***Exercice 17** Calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}.$

****Exercice 18** Calculer, pour x et α réels, le rayon de convergence et la somme des séries suivantes :

$$\sum \frac{\sin(n\alpha)}{n!} x^n \quad \text{et} \quad \sum \frac{n x^n}{(2n+1)!}$$

****Exercice 19** Déterminer le domaine de convergence et la valeur de : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+3)\ n!} x^n$. Indication : il peut être utile de dériver...

***Exercice 20** Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de de la série entière : $\sum \mathrm{ch}(n) x^n$

***Exercice 21** 1. Vérifier que $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{x-2}{x^2-x+1}\right)$.

2. Montrer que, pour $x \in]-1,1[$: $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$.
3. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

♡* **Exercice 22** Soit $f \ : \ \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0. On notera $\tilde{f}$ ce prolongement.
2. Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur de $\tilde{f}^{(n)}(0)$ pour tout n.

****Exercice 23** Soit (s_n) la suite définie par $s_0 = 0$, $s_1 = 1$ et $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

1. Exprimer s_n en fonction de n, pour tout n.
2. Quel est le rayon de convergence R de $\sum s_n x^n$?
3. Calculer la somme $S(x)$ de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n$ pour $|x| < R$.

****Exercice 24** 1. Trouver a, b, c tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{(2n+1)}$.

2. On considère la série entière : $\sum \dfrac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$. Déterminer son rayon de convergence.
3. Exprimer sa fonction somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$, sur l'intervalle ouvert de convergence, à l'aide des fonctions usuelles. Voir dernière question page suivante...
4. Facultatif (***) : Que dire aux bornes de l'intervalle de convergence ?

♡* **Exercice 25** Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}x^n$.

1. Donner le rayon de convergence de $f(x)$.
2. Montrer que : $2f=(1+4x)f'$.
3. En déduire f.

♡** **Exercice 26** Soit (a_n) la suite de nombres réels définis par : $a_0=a_1=1$ et $\forall n\geq 1,\ a_{n+1}=a_n+\frac{2}{n+1}a_{n-1}$.

1. Etablir que, pour tout entier $n\geq 1$, on a : $1\leq a_n\leq n^2$.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_nx^n$.
3. Pour tout $x\in]-1,1[$, on pose $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$.
   (a) Montrer que S est solution sur $]-R,R[$ de l'équation différentielle suivante : $(1-x)y'-(1+2x)y=1+2x$.
   (b) Exprimer S à l'aide des fonctions usuelles.

*** **Exercice 27**

1. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, établir calculer l'intégrale $I_k=\int_0^1 x^{k-1}\ln(x)dx$.
2. Etablir la convergence de l'intégrale : $I=\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}dx$.
3. Exprimer I comme somme d'une série.

*♡ **Exercice 28** Prouver que la fonction $(x\mapsto e^x\sin(x))$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminer son développement.

Exercice 29 Soient α et β deux complexes non nuls.
On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=0,\ u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=\alpha u_{n+1}+\beta u_n$.
Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_nz^n$? Calculer la somme $\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n$ pour $|z|<R$.

Partie 2 : Exercices d'oral

Exercice 30 On pose $f(x)=\dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r,r[$ où $r>0$).
   Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon $R>0$.
   On pose, pour tout $x\in\,]-R,R[$, $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 31

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n:t\longmapsto t^n\ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n=\int_0^1 t^n\ln t dt$.
2. Prouver que $f:t\longmapsto \mathrm{e}^t\ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et que $\int_0^1\mathrm{e}^t\ln t dt=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{nn!}$.
   Indication : utiliser le développement en ssérie entière de la fonction exponentielle.

Exercice 32

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes : $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^{2n+1}$, $\sum n^{(-1)^n}z^n$, et $\sum\cos nz^n$.

Exercice 33

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Exercice 34

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction

$$f \ : \ x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$$

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?

Exercice 35 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence.
   On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R,R[$.

Exercice 36

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$, $\ f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x}$ si $x > 0$, $\ f(x) = \cos\sqrt{-x}$ si $x < 0$.
   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 37 Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :
$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ et $\displaystyle\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

Exercice 38

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.
2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\, x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.