***Exercice 1** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Chacun des résultats de X est affiché sur un compteur qui est détraqué de la manière suivante : si X n'est pas nul, le compteur affiche la valeur de X et si X est nul, le compteur affiche un nombre au hasard entre 1 et n.
Soit Y la VAR égale au nombre affiché sur le compteur.
Déterminer la loi de Y et son espérance. Montrer que $E(Y) \geq E(X)$ (sans calcul).

****Exercice 2** Préliminaire : Formule de Vandermonde. Soient n, a, b des entiers naturels non nuls, tels que $n \leq a+b$.
Montrer que :

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{a}{r} \times \binom{b}{n-r}$$

On considère une rangée infinie de cases indexées par $\mathbb{Z}$.

1. Une puce placée à l'instant n sur une case, saute à l'instant $n+1$ sur une des 2 cases voisines équiprobablement. A l'instant 0, elle se trouve sur la case 0. On note X la VAR indiquant le numéro de la case occupée par la puce après n sauts, n étant un entier naturel fixé.
Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance et sa variance.
2. On suppose qu'on a placé 2 puces à l'instant 0 sur la case 0. Ces deux puces sautent à chaque instant sur une des deux cases voisines de celles qu'elles occupaient à l'instant précédent, et de manière indépendante l'une de l'autre.
Quelle est la probabilité qu'elles se retrouvent sur la même case après n sauts ?
Quelle est la probabilité qu'elles aient accompli tout leur trajet ensemble, sachant qu'elles sont ensemble à l'instant n ?

** **Exercice 3** Soient A,B et C trois variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant une même loi binomiale de paramètres n et p. **On admettra** (provisoirement) **qu'alors $A+B+C$ suit une loi binomiale de paramètres $3n$ et p.**
Soit M la variable aléatoire qui à tout $\omega \in \Omega$ associe la matrice $M(\omega)$ définie par :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la probabilité que M soit inversible ?
2. Quelle est la probabilité que M soit nilpotente, c'est à dire qu'il existe un entier $p > 0$ tel que $M^p = 0$?
3. Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur ?
4. Donner la loi, l'espérance du nombre de valeurs propres de M. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?
5. Donner la loi et l'espérance de la plus grande des valeurs propres.

***Exercice 4** On dispose d'une pièce truquée, telle que la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$. On lance deux fois la pièce : si on obtient (F,P), on a gagné, si on obtient (P,F), on a perdu ; sinon, on recommence. Déterminer le nombre moyen de lancers effectués.
Indication : si on note X le nombre de lancers effectués, on pourra s'intéresser à $Y = \frac{X}{2}$.

***Exercice 5** Soit X une V.A.R. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que

- $P(X=n) = 0$ si les reste de la division euclidienne de n par 4 est égal à 2 ou à 3.
- $P(X=n) = \lambda 2^{-n}$ sinon.

1. Trouver la valeur de λ (de telle sorte que X soit bien une V.A.R.)
2. Trouver $E(X)$ (et $V(X)$ si vous avez le courage).

****Exercice 6** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$. On observe une assemblée de n personnes qui jouent à un jeu palpitant : chaque personne lance une pièce de monnaie. Une personne gagne une partie si elle obtient le contraire de toutes les autres. On note X la V.A.R. désignant le nombre de parties nécessaires à l'obtention d'un gagnant. Trouver la loi de X, son espérance et sa variance (si elles existent).

***Exercice 7** Un candidat passe chaque année 3 concours indépendants avec une probabilité de réussite à chaque concours de 1/3. Déterminer la loi du nombre d'années X nécessaires l'intégration d'une école. Calculer le nombre moyen d'années nécessaires à l'intégration d'une école.

***<u>Exercice 8</u>** Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a+b<1$.
Un interrupteur admet deux positions que l'on note 0 et 1. Si, à l'instant n, il est en position 0, il sera encore en position 0 à l'instant $n+1$ avec la probabilité $1-a$ et passera en position 1 avec la probabilité a. De même, s'il est en position 1, il y restera l'instant suivant avec la probabilité $1-b$ et basculera en position 0 avec la probabilité b.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit X_n la position de l'interrupteur à l'instant n.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} P([X_{n+1}=0]) \\ P([X_{n+1}=1]) \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} P([X_n=0)] \\ P([X_n=1]) \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$$
2. Si l'on suppose que X_0 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{a}{a+b}$, déterminer la loi de la variable X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Dans le cas général, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi de Bernoulli dont on déterminera le paramètre p_n.
4. Que peut-on dire de $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=k)$ pour $k \in \{0;1\}$?

****<u>Exercice 9</u>** Soit X une variable aléatoire réelle de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit une variable aléatoire réelle Y de la manière suivante :
— Si $X=0$ ou si X prend une valeur impaire, alors $Y=0$
— Si X prend une valeur paire, alors $Y=X/2$.
Trouver la loi de Y, son espérance et sa variance. (Le résultat n'est pas palpitant).

***<u>Exercice 10</u>** Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Déterminer et reconnaître la loi de X dans chacun des cas suivants :

1. il existe $k \in]0,1[$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = k \times P(X \geq n)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 4 \cdot P(X=n+2) = 5 \cdot P(X=n+1) - P(X=n)$
3. Ici $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = \dfrac{3}{n} P(X=n-1)$. On pose $P(X=0)=p_0$. (Il faudra déterminer p_0 pour que X soit bien une variable aléatoire réelle)

****♡<u>Exercice 11</u>** Une princesse est retenue prisonnière dans un chateau. Un prince charmant se met en tête de la délivrer. Lorsqu'il arrive à l'entrée du chateau, il se trouve devant trois portes. Il en ouvre une au hasard (équiprobable).
Si il ouvre la première porte, un dragon apparait et le dévore.
Si il ouvre la deuxème, il délivre la princesse.
Si il ouvre la troisième, une sorcière lui fait boire un filtre, il oublie ce qu'il a fait et est remis à la porte du chateau. Puis il retente de délivrer la princesse.
Le prince renouvelle ses tentatives jusqu'à ce qu'il délivre la princesse ou soit dévoré par le dragon.

1. Calculer la probabilité de l'événement D_k ="il délivre la princesse au k-ème essai.
2. Calculer la probabilité de l'événement D="il délivre la princesse".
3. On note T le nombre de tentatives du prince (c'est à dire le nombre de fois où il est amené à choisir une porte à ouvrir). Donner la loi de T ainsi que son espérance.
4. On note R le nombre d'essais nécessaires pour délivrer la princesse. Si le prince échoue, on convient que $R=0$. Donner la loi de R ainsi que son espérance.
5. Quelle est la probabilité que le prince recommence indéfiniment ses tentatives ?
6. Si le prince échoue dans sa tâche, le syndicat des princes envoie immédiatement un autre prince (qui procède de même), jusqu'à ce que la princesse soit délivrée. Calculer le nombre moyen de princes "utilisés" pour délivrer la princesse.

****♡Exercice 12**

1. Soit X une variable aléatoire réelle telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et soit $p \in]0,1[$ un réel fixé.
   Soit Y une variable aléatoire réelle dont la loi conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   En d'autres termes : $P_{(X=n)}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k \leq n$ et $P_{(X=n)}(Y = k) = 0$ si $k > n$.
   Quelle est la loi de Y ?
2. La loi de Poisson est couramment employée dans des problèmes de files d'attente. Elle modélise le nombre de personnes arrivant à un guichet en une heure, le nombre de messages reçus par un ordinateur, etc.... Par exemple le nombre de voitures se présentant en une heure à un péage est une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$). A ce péage, il y a N barrières,chaque voiture choisit une barrière au hasard, de manière équiprobable et indépendamment des autres voitures. On note Y le nombre de voitures se présentant à la barrière numéro 1.
   (a) Quelle est la loi de Y conditionnée par $(X = n)$? Autrement dit : quelle est la loi de Y pour la probabilité $P_{X=n}$?
   (b) En déduire la loi de Y.

***♡Exercice 13** Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des raisons diverses, les interventions ont lieu parfois avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est 0,25.

1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement : "le client a subi au moins un retard".
2. Au cours des années 2015 et 2016, le service après-vente enregistre une succession d'appels. Le rang du premier appel pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 2015 (resp. 2016) définit une variable aléatoire réelle Y (resp. Z).
   (a) Déterminer les lois de Y et de Z.
   (b) Calculer $P(Y \leq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (c) On pose $T = \max(Y, Z)$.
   Calculer $P(T \leq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire la loi de T, puis son espérance.

***Exercice 14** **Le cueilleur de champignon.** On désigne par N le nombre de champignons ramassés par un cueilleur durant une période fixée. On suppose que N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de fonction génératrice G. On suppose de plus que la probabilité pour qu'un champignon cueilli soit comestible est p. En faisant les hypothèses d'indépendance qui vont de soi, montrer que la probabilité pour que *tous* les champignons ramassés soient comestibles est $G(p)$.

***Exercice 15** Soit x un réel strictement positif et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi de probabilités est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

1. Calculer sa fonction génératrice G_X à l'aide des fonctions usuelles.
2. En déduire son espérance et sa variance.

***Exercice 16** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $p_n = P(X = n)$, $r_n = P(X > n)$ et on note G la fonction génératrice de X.

1. Quelle relation a-t-on entre la série $\sum p_n$ et la suite (r_n) ?
2. On considère la série entière $\sum r_n t^n$. Montrer que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.
3. Pour $|t| < 1$, on pose : $H(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$. Montrer que $H(t) = \dfrac{1 - G(t)}{1 - t}$.

***Exercice 17** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note G_X sa fonction génératrice, définie sur un intervalle $]-R_X, R_X[$ (avec $R_X > 1$).

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Justifier l'existence de la fonction génératrice de $aX + b$. La déterminer en fonction de G_X ;
2. Justifier que G_X est définie en 1 et en -1. En déduire que :
$$P(X \text{ est pair}) = \frac{G_X(1) + G_X(-1)}{2} \qquad \text{et} \qquad P(X \text{ est impair}) = \frac{G_X(1) - G_X(-1)}{2}$$
3. Si X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, quelle est la probabilité que X soit paire ? Et si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$?