Table des matières

I Le théorème de convergence dominée

Dans le chapitre sur les suites de fonctions, nous avons vu que :

- si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$,
- et si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$,

$$\text{alors : } \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Malheureusement : ce théorème n'est pas valable si on intègre sur un intervalle quelconque (*i.e.* sur un intervalle ouvert ou de la forme $[a,+\infty[$ par exemple).

Exemple 1 Pour $n \geq 1$, on considère f_n la fonction continue et affine par morceaux telle que

- $f_n(0) = 0,\ f_n(n) = 1/n$ et f_n est affine sur $[0,n]$,
- $f_n(n) = 1/n$ et $f_n(2n) = 0$ et f_n est affine sur $[n,2n]$,
- f_n est la fonction nulle sur $[2n,+\infty[$.

1. Tracer la courbe représentative de f_n.
2. Donner $\|f_n\|_\infty$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers une fonction simple (à déterminer).
3. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n$
4. A-t-on $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$?

Théorème 1 (Théorème de convergence dominée (admis))
Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I.
On suppose que :

- La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f (continue par morceaux) sur I.
- Il existe φ intégrable sur I à valeurs réelles telles que : $\forall t \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$

Alors f_n et f sont intégrables sur I et $\int_I f = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n$

Exemple 2 Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+nt)(1+t^2)}dt$.
Justifier l'existence de I_n.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ sans chercher à calculer I_n.

Exemple 3 Soit f_n la fonction définie par : $\forall t \in [0, n[f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n e^{t/2}$ et $f_n(t) = 0$ pour $t \geq n$.
Autrement dit : $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n e^{t/2} \times \mathbb{1}(t)$.

1. Justifier que f_n est continue par morceaux et intégrable sur sur $\mathbb{R}^+$.
   On pose alors $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n e^{t/2} dt$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
3. Justifier rapidement que : $\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leq u$.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

II Le théorème d'intégration terme à terme pour une série de fonctions

Proposition 1 (Intégration terme à terme (admis))
Soit $\sum u_n$ une série de fonctions avec $u_n : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux. On suppose que :

- Pour tout entier n, la fonction u_n est intégrable sur I.
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue par morceaux.
- La série $\sum \int_I |u_n|$ converge.

Alors $\sum u_n$ est intégrable et de plus : $\int_I \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_I u_n$

Exemple 4 Illustrer le résultat avec : $\forall t \in]0; 1[, \quad u_n(t) = -t^n \ln(t)$

Exemple 5 Montrer que $\int_0^{\infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}} \right) dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

Remarque 1 Lorsque ce théorème ne s'applique pas, ou s'applique difficilement, on peut appliquer le théorème de convergence dominée sur les sommes partielles ou sur les restes.

Exemple 6 Illustration de la remarque précédente avec $u_n(x) = (-1)^n e^{-nx}$.
Montrer que $\int_0^{\infty} (\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-nx}) dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

III Intégrales à paramètre

III.1 Continuité de $x \mapsto \int_I f(x,t)dt$

Théorème 2 (Continuité)
Soit $f : \left\{ \begin{array}{lll} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ avec A et I intervalles de $\mathbb{R}$.
On suppose que :

- Pour tout réel $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.
- Pour tout réel $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- Hypothèse de domination :
  il existe φ intégrable sur I telle que : $\forall (x,t) \in A \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

Alors $x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est continue sur A.

Remarque 2 En pratique, il faut

- vérifier que la fonction f est continue par rappot à x
- l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans A

.

Exemple 7 Montrer que $x \mapsto \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est continue sur $[0;\infty[$

Exemple 8 Importance de l'hypothèse de domination. On considère la fonction g définie par $g(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-xt}dt$.
Justifier que g est définie sur $\mathbb{R}^+$ puis calculer $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
La fonction g est-elle continue ? Quelle hypothèse du théorème n'est pas vérifiée ?

III.2 Limite aux bornes de l'intervalle de définition

Théorème 3 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu)
Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que :

- pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$;
- pour tout $x \in A$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I, \ \ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors ℓ est intégrable sur I et de plus :

$$\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 9 Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} x^{-x^2t^2} dt$.

III.3 Dérivabilité de $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$

III.3.a Préliminaire : Dérivées partielles

Définition 1 (Dérivée partielle en un point) Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit $f : \left\{ \begin{array}{lll} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array} \right.$

Soit $t \in I$ un réel **fixé.** On considère $g_t \ : \ x \mapsto f(x,t)$.
On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x en (x,t) si l'application g_t est dérivable en x.
On note alors $(g_t)'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.
Autrement dit : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h}$ lorsque cette limite existe.
Si f admet une dérivée partielle par rapport à x en tout point de $A \times I$, alors on peut définir
la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: $\left\{ \begin{array}{lll} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array} \right.$

Exemple 10 Expliciter la dérivée partielle par rapport à x de la fonction $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \ln(1+x^2+t^2) \end{array} \right.$

Exemple 11 Expliciter la dérivée partielle de $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & x^3 + 2x^4t^3 + 5x^2t \end{array} \right.$

III.3.b Dérivabilité des intégrales à paramètre

Théorème 4 (Dérivabilité (dém. non exigible))
Soit $f : \left\{ \begin{array}{lll} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ avec A et I intervalles de $\mathbb{R}$.
On suppose que :

- Pour tout réel $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur A.
- Pour tout réel $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.
- Pour tout réel $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- **Hypothèse de domination** : Il existe φ intégrable sur I telle que : $\forall (x,t) \in A \times I, \quad \left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t)$

Alors $x \mapsto g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est de classe C^1 sur J et : $\forall x \in J, \ g'(x) = \displaystyle\int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Remarque 3 En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Exemple 12 Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{e^{ixt}}{1+t^3}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

III.3.c Dérivées successives

Proposition 2 (Corollaire : classe C^k des intégrales à paramètres)

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ avec A et I intervalles de $\mathbb{R}$.

On suppose que :

- Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur A.
- Pour tout $x \in A$, et pour tout entier p dans $\{0, ..., k-1\}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur I.
- Pour tout réel $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- Hypothèse de domination : Il existe φ intégrable sur I telle que : $\forall (x,t) \in A \times I, \quad \left| \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t)$

Alors la fonction $x \mapsto g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est de classe C^k sur J.

De plus : $\forall x \in J, \forall p \leq k, \;\; g^{(p)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)dt.$

Exemple 13 Montrer que $g \; : \; x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{itx} dt$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Exprimer $g^{k)}(x)$ à l'aide d'une intégrale.