I : Exercices pour les TD

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}$.

1. Etudier l'intégrabilité de f_n.
2. On pose $u_n = n\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.
   Etudier la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

Exercice 2 Déterminer les limites de (I_n) dans les deux cas suivants :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n}dx \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)^{\frac{1}{n}}}$$

Exercice 3 Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{2n} f(t)dt.$
Justifier l'existence de I_n.
Déterminer la limite de I_n sous la forme d'une intégrale faisant intervenir f.

Exercice 4 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(n+x)}{\sqrt{x}(n+x)}dx$

1. Etudier la convergence de l'intégrale généralisée I_n.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. A l'aide d'un changement de variable, calculer $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(n+x)}dx.$
   Encadrer alors I_n puis donner un équivalent de I_n.

Exercice 5 Montrer que $\quad \displaystyle\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t^2 e^{-nt}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$

Exercice 6 Dans cet exercice, on admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}dt$ et la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ convergent.
2. Ecrire $\dfrac{\sqrt{t}}{e^t-1}$ sous la forme d'une série.
3. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \sqrt{t}e^{-nt}dt$ puis démontrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

Exercice 7 Soient p et q deux réels strictement positifs. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kq+p}.$

Exercice 8 Soit $\sum a_n$ une série de réels absolument convergente.

1. Montrer que pour tout entier n, la fonction $f_n : x \mapsto x^n e^{-x}$ est intégrable et déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt.$
2. On pose $u_n(x) = \dfrac{a_n x^n}{n!}$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Exercice 9 Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-nt}\right)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

Exercice 10 $\forall t > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{1+n^2t^2}$

1. Montrer que $S : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que S est intégrable sur $]0, +\infty[$.
3. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum \int |u_n|$?
4. On note $R_n(t) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(t)$.

   Montrer que R_n est intégrable sur $]0, +\infty[$, et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} R_n(t)dt$.
5. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)dt$.

Exercice 11 (CCP) Pour $x \geqslant 0$ et $t \in [0, 1]$, on pose $g(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x,t)dt$

On note aussi $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $[0, +\infty[$.
   Soit $a > 0$. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, a]$ et calculer $f'(x)$.
   En déduire que f est C^1 sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que h est définie et C^1 sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que $f + h^2$ est une fonction constante sur $[0, +\infty[$, et déterminer cette constante.
4. A l'aide d'une majoration, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

Exercice 12 (CCP) Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t}dt$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est positive et décroissante.
3. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-xt)dt$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $F(x) - F'(x) = \dfrac{1}{x}$. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$.
5. Montrer que pour $x > 0$, $F(x) = e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$. En déduire la limite de F en 0^+.
6. Montrer que $F(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 13 (CCP) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^x}dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) + F(-x) = 1$. Calculer $F(k)$ pour $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
2. Déterminer les limites de F en $-\infty$ et $+\infty$.
   Donner un équivalent de $F(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que F est convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.
   Rappels du programme de 1ère année *(qui doit vous inciter à retourner voir votre cours si vous n'en avez aucun souvenir....)*
   Définition d'une fonction convexe *: La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.*
   Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, et position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.
   Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables : $f'' \geqslant 0$.
   Exemples d'inégalités de convexité.

Exercice 14 $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt$

1. Domaine de définition, parité et valeur en 0 de f ?
2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\quad xe^t \leqslant \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}$.
   En déduire que pour tout $x > 0$, on a : $\quad x \leqslant f(x) \leqslant x + \dfrac{1}{6x}$.
   Quelle est la nature de la branche infinie de C_f en $+\infty$?
3. (a) Soit $x > 0$. En effectuant le changement de variable $u = xe^t$, déterminer une nouvelle expression de $f(x)$. Faire de même pour $f'(x)$.
   (b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.
   (c) Montrer que pour $x > 0$, on a :
   $$\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}du = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}du$$
   Montrer que $u \mapsto \dfrac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$
   (d) En déduire un équivalent de $f'(x)$ puis de $f(x) - \dfrac{1}{2}$ au voisinage de 0.

Exercice 15 Transformée de Laplace (extrait E3A. PC. 2010)
E désigne l'ensemble des fonctions f définies et continues sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles telles que :
Il existe $A > 0$, $C > 0$ et un entier n tels que $\quad \forall t \geqslant A,\ |f(t)| \leqslant Ct^n$

1. Pour tout entier n et pour tout réel $x > 0$, on considère l'intégrale généralisée $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}dt$.
   Montrer, par récurrence que pour tout entier n, l'intégrale $I_n(x)$ converge et $I_n(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.
2. Soit $f \in E$. Soit x un réel strictement positif. Montrer que $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
   Dans toute la suite de l'exercice, on note $L(f)(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-xt}dt$.
   Montrer que $L(f)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Soit $f \in E$. On considère des réels $A > 0$, $C > 0$ et un entier n tels que $|f(t)| \leqslant Ct^n$ pour $t \geqslant A$.
   - Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a $\quad |L(f)(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^A |f(t)e^{-xt}|dt + C\frac{n!}{x^{n+1}}$.
   - Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_0^A |f(t)e^{-xt}|dt = 0$
   - En déduire la limite en $+\infty$ de $L(f)(x)$.

Exercice 16 **Fonction Gamma.** $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

1. Montrer que la fonction Γ est définie sur $]0,+\infty[$.
   Montrer que pour réel $x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier n non nul.
2. Montrer que Γ est continue sur son ensemble de définition.
3. Montrer que Γ est de classe C^{∞} sur son ensemble de définition, et exprimer sa dérivée à l'aide d'une intégrale.

II : Exercices d'oral

Exercice 17

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 18 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

Exercice 19 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2. Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 20 On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\forall\, t \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
   On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 21

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E) .