

? À rendre le jeudi 16 octobre 2025

Devoir Maison n°4 : Oscillateur harmonique — Corrigé



Remarque —

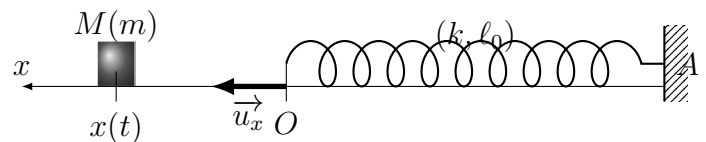
La rédaction d'un exercice de mécanique COMMENCE TOUJOURS PAR la définition du :

- SYSTÈME,
- RÉFÉRENTIEL,
- BILAN DES FORCES,
- SCHÉMA

C'est INDISPENSABLE avant toute chose.

Exercice n°1 Masse percutant un ressort 🎵

Un ressort de longueur à vide $\ell_0 = 30$ cm et de constante de raideur k est fixé en A à une paroi (cf figure ci-contre). Initialement, le ressort est horizontal et à l'équilibre et l'extrémité libre du ressort est initialement en O .



Un point M de masse $m = 200$ g, glisse sans frottement sur l'axe horizontal (Ox) . Ce point M percute l'extrémité libre du ressort à l'instant $t = 0$ et M reste accroché à cette extrémité pour $t > 0$.

À $t = 0$, le point M percute le ressort à la vitesse $\vec{v}_0 = -v_0\vec{u}_x$, avec $v_0 > 0$.

Pour tout $t \geq 0$, le ressort reste horizontal.

R1. Quelle est la longueur prise initialement par le ressort, avant que la masse m s'y accroche ?

Solution:



Remarque —

! Réponse à justifier

Tant que la masse n'est pas accrochée au ressort, ce dernier ne subit aucune force et sa longueur est donc égale à sa longueur à vide.

R2. Une fois la masse accrochée au ressort, quelle est l'expression de la force $\vec{f}_{\text{el}}$ exercée par le ressort sur la masse ? On l'**exprimera** en fonction de la constante de raideur, de la longueur instantanée, de la longueur à vide et d'un vecteur unitaire bien choisi.

Représenter cette force sur deux schémas distincts : l'un lorsque M est entre O et A , et un autre lorsque M se situe au-delà de O .

Solution:

Système : masse m

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des forces :

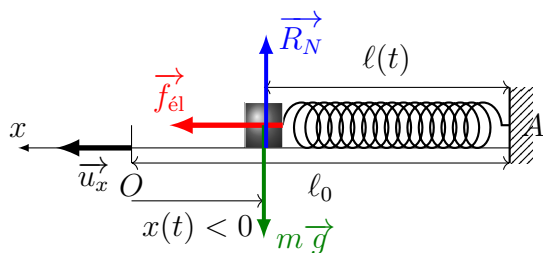
- poids : $m\vec{g}$

- réaction normale du support : $\vec{R}_N$
- force de rappel élastique : $\vec{f}_{\text{él}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_x$, car $\vec{u}_x$ est le vecteur unitaire dirigé dans le sens d'allongement du ressort.

Remarque –

Il y avait deux schémas à faire, mais la force de rappel a la même expression dans les deux cas.

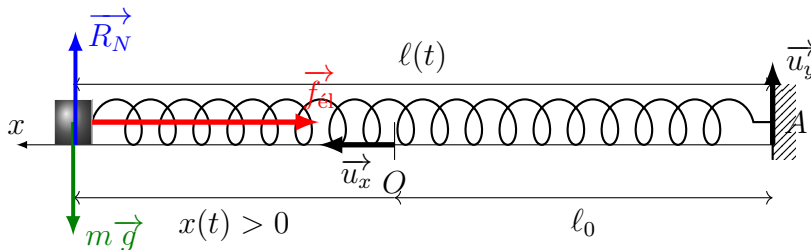
Pour M entre O et A , le ressort est comprimé, et la force est donc dirigée dans le sens d'allongement du ressort.



$\ell(t) < \ell_0$, le ressort est comprimé, la force tend donc à l'étendre. Elle est ici dirigée de A vers M , c'est-à-dire selon $+\vec{u}_x$.

L'expression est cohérente : $\ell(t) - \ell_0 < 0$, donc $-k(\ell(t) - \ell_0) > 0$, donc $\vec{f}_{\text{él}}$ selon $+\vec{u}_x$.

Pour M au-delà de O , le ressort est étiré et la force est donc dirigée dans le sens de compression du ressort.



$\ell(t) > \ell_0$, le ressort est étiré, la force tend donc à le comprimer. Elle est ici dirigée de M vers A , c'est-à-dire selon $+\vec{u}_x$.

L'expression est cohérente, en effet $\ell(t) - \ell_0 > 0$, donc $-k(\ell(t) - \ell_0) < 0$, donc $\vec{f}_{\text{él}}$ selon $-\vec{u}_x$.

Remarque –

ATTENTION à l'expression de la force ! Pour un système donné, la force a toujours la même expression, que le ressort soit comprimé ou allongé !

La force s'écrit TOUJOURS :

$$-k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_{\text{ext}}$$

R3. Compte-tenu de l'origine de l'axe (Ox) donnée par le schéma, **exprimer** $\vec{f}_{\text{él}}$ en fonction de k , x et de $\vec{u}_x$.

Solution:

Remarque –

Un **SCHÉMA** clair et **COMPLÉTÉ** avec : $\ell(t)$, ℓ_0 et $x(t)$ est **INDISPENSABLE** pour obtenir la relation juste entre ces trois grandeurs.

L'origine de l'axe étant à la position d'équilibre, d'après le schéma ci-dessus, la longueur instantanée du ressort $\ell(t)$ est liée à la longueur à vide et à ℓ_0 par :

- $\ell(t) = \ell_0 + x(t)$, soit $\ell(t) - \ell_0 = x(t)$, ainsi $\vec{f}_{\text{él}} = -kx(t)\vec{u}_x$
- Schéma de gauche : $x(t) < 0$ et $\ell(t) < \ell_0$, donc $\ell(t) = \ell_0 + x(t) < \ell_0$.
On peut éventuellement passer par la valeur absolue : $\ell(t) = \ell_0 - |x(t)|$, or $x < 0$, donc $|x| = -x$, donc $\ell(t) = \ell_0 + x(t)$
- Schéma de droite : $x(t) > 0$ et $\ell(t) > \ell_0$, donc $\ell(t) = \ell_0 + x(t) > \ell_0$.



Remarque –

Le signe de x ne modifie pas l'expression de $\ell(t)$.

ATTENTION à la manipulation des grandeurs algébriques : on n'ajoute pas un $-$ devant x car x est négatif.

R4. **Établir** l'équation différentielle du mouvement de la masse pour $t \geq 0$.

Solution: Pour établir l'équation différentielle du mouvement de la masse pour $t \geq 0$, il faut appliquer le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_N + \vec{f}_{el}$

Or, le mouvement n'a lieu que selon l'axe (Ox) , donc $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$

Ainsi, le PFD s'écrit : $m\ddot{x}\vec{u}_x = -mg\vec{u}_y + R_N\vec{u}_y - kx(t)\vec{u}_x$

En égalisant les composantes selon $\vec{u}_x$: $m\ddot{x} = -kx(t) \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x(t) = 0$

R5. **Écrire** l'équation différentielle précédente sous la forme canonique suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Comment **se nomme** un système régi par une telle équation différentielle ?

Exprimer ω_0 en fonction de k et m . Comment **se nomme** cette grandeur ? En **donner** l'unité.

Solution: Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique

On identifie ainsi la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, qui s'exprime en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

R6. **Résoudre complètement** l'équation différentielle compte tenu des données de l'énoncé.

Solution:



Remarque –

Attention à la lecture de l'énoncé pour les conditions initiales : il ne faut pas les inventer/changer.

Ici $\frac{dx}{dt}(0) = -v_0$, il n'y a aucune raison d'enlever le $-$ dans la suite.

La solution générale de l'équation différentielle précédente s'écrit $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

L'énoncé nous donne qu'à l'instant initial : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = -v_0$

Ainsi, on détermine : $x(0) = \boxed{A = 0}$

Puis on calcule la dérivée temporelle de la position en fonction du temps : $\dot{x} = B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

À $t = 0$: $\dot{x}(0) = B\omega_0 = -v_0$, soit $B = -\frac{v_0}{\omega_0}$

Ainsi $x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

R7. **Exprimer** l'amplitude du mouvement en fonction des données de l'énoncé.

Solution:



Remarque –

Par définition, l'amplitude est TOUJOURS POSITIVE!!!!



Remarque –

Cohérence des notations : si la position de M est repérée par son abscisse x , on notera X_m son amplitude.

L'amplitude du mouvement est $X_m = \frac{v_0}{\omega_0}$

Pour plus de détails (pas nécessaires dans votre copie, sauf si ça vous aide à ne pas vous tromper dans le calculs).

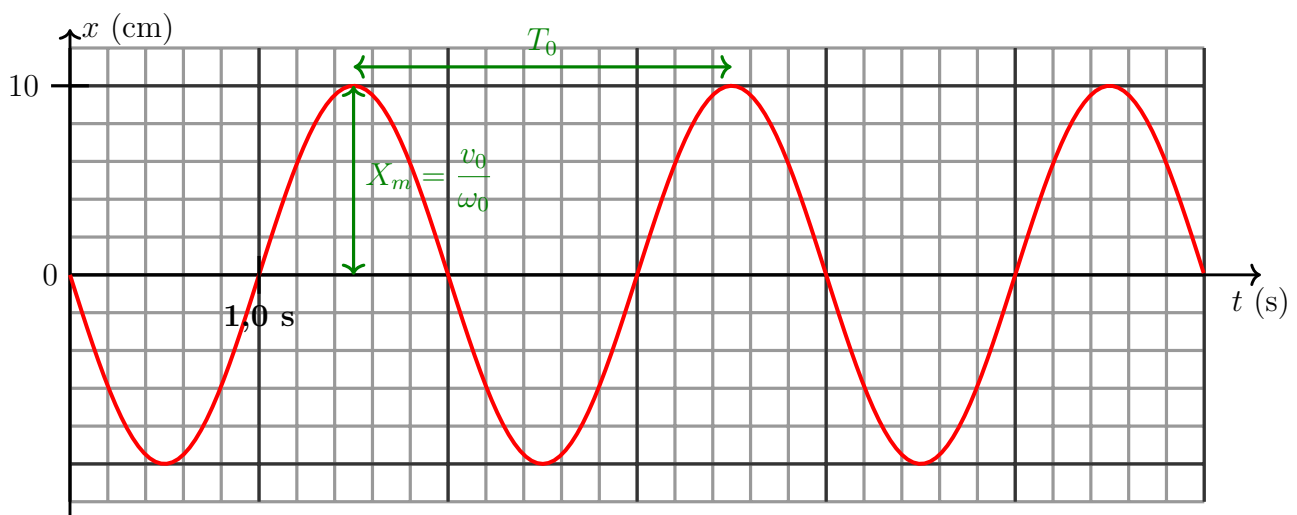
Définition de l'amplitude $X_m = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$

Ici x est maximale quand $\sin(\omega_0 t) = -1$, et vaut $x_{\max} = +\frac{v_0}{\omega_0}$

et x est minimale quand $\sin(\omega_0 t) = +1$, et vaut $x_{\min} = -\frac{v_0}{\omega_0}$

D'où $X_m = \frac{v_0}{\omega_0}$

On trace l'évolution de l'abscisse en fonction du temps :



R8. À l'aide de mesures graphiques et des données de l'énoncé, déterminer la valeur de la pulsation propre ω_0 des oscillations, de la constante de raideur k du ressort et de la vitesse v_0 .

Solution: Période propre : $T_0 = 2,0 \text{ s}$

Pulsation propre $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 3,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

On détermine la constante de raideur k à l'aide de l'expression de la pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow k = \omega_0^2 m = 2,0 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$$



Remarque –

Attention aux unités : la masse doit être exprimée en kilogramme (kg).

On lit graphiquement l'amplitude : $X_m = 10 \text{ cm}$, or $X_m = \frac{v_0}{\omega_0}$, soit $v_0 = X_m \omega_0 = 0,31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$



Remarque –

Toute valeur numérique doit être accompagnée d'une UNITÉ

R9. **Exprimer**, à t quelconque, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique en fonction des données du problème. **Commenter**.

Solution:



Remarque –

- On attendait les expressions de $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{E}_{p,él}$ en fonction des données du problème : donc il fallait aller jusqu'à les exprimer en fonction de m , v_0 , k (et t qui est la variable de temps). S'arrêter à $\frac{1}{2}kx^2$ ne répond pas à la question.
- Ne mélangez jamais grandeur littérale et valeur numérique.

— Énergie cinétique :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c &= \frac{1}{2}mv^2 \\ \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ \text{or } \dot{x} &= -v_0 \cos(\omega_0 t) \\ \text{donc } \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2(\omega_0 t)\end{aligned}$$

— Énergie potentielle, qui se réduit à l'énergie potentielle élastique, celle de pesanteur étant constante :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{p,él} &= \frac{1}{2}k(\ell(t) - \ell_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}k\frac{v_0^2}{\omega_0^2} \sin^2(\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2(\omega_0 t)\end{aligned}$$

— Énergie mécanique :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,él} \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2\end{aligned}$$

Remarque –

Il faut conclure : COMMENTER le résultat.

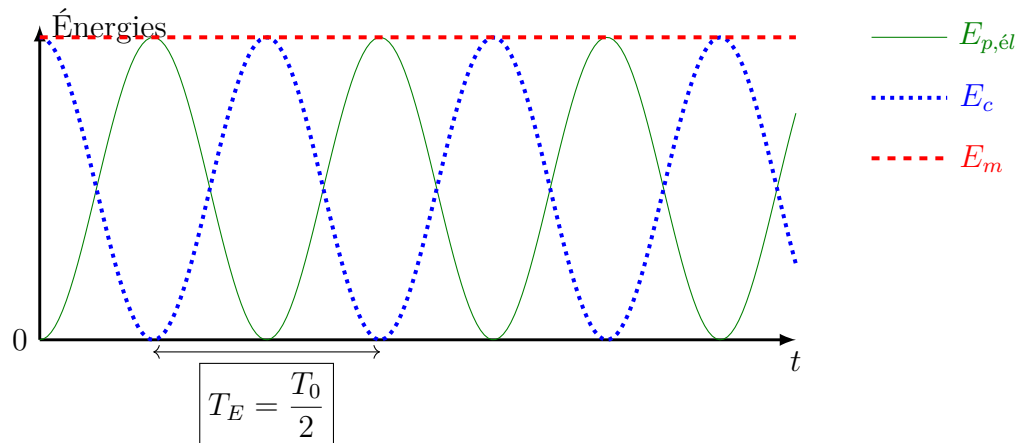
On constate que l'énergie mécanique est constante, ce qui est cohérent avec la modélisation de départ où aucun frottement n'a été pris en compte.

R10. Représenter l'allure de ces trois énergies en respectant les conditions initiales.

Solution:

Remarque –

Il faut tracer les allures des énergies dans le cadre de l'exercice, et pas « une allure d' $\mathcal{E}_c$, $\mathcal{E}_p$, $\mathcal{E}_m$ qui provient d'un vague souvenir de lycée, sans aucun rapport avec la situation étudiée ici. »



Remarque –

Attention, les CI étaient différentes de celles du cours. Ici $v(0) \neq 0$, donc $\mathcal{E}_c(0) \neq 0$: il faut adapter le cours à la situation de l'exercice.

Rq : L'énergie potentielle dépend du temps en $\sin^2(\omega_0 t)$, en linéarisant (pour identifier la période), on écrit : $\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{2}$

Il s'agit donc d'une fonction périodique de pulsation $\omega_E = 2\omega_0$, et donc de période $T_E = \frac{T_0}{2}$.
Les échanges d'énergie se font deux fois par période propre de l'oscillateur.

On refait la même manipulation pour différentes vitesses initiales v_0 .

R11. La période du mouvement sera-t-elle différente pour ces nouvelles vitesses initiales ? Justifier.
L'amplitude du mouvement sera-t-elle différente pour ces nouvelles vitesses initiales ? Justifier.

Solution:

Remarque –

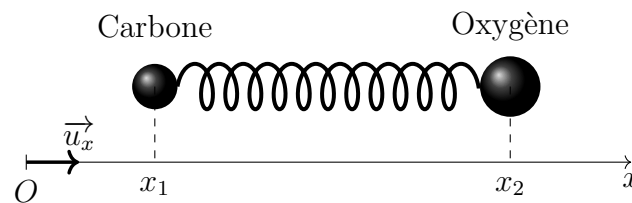
Une réponse précise était attendue. Répondre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ donc T_0 ne dépend pas de v_0 ne répond en rien à la question, si on n'a pas de précisions sur la dépendance de ω_0 avec v_0 !

La période du mouvement ne dépend que de k et m , et pas de la vitesse initiale, donc la modification de la vitesse initiale ne modifie pas la période du mouvement.

L'amplitude du mouvement étant égale à $\frac{v_0}{\omega_0}$, elle est d'autant plus grande que la vitesse initiale est élevée.

Exercice n°2 Monoxyde de carbone 🎵 🎵 🎵

Une molécule de monoxyde de carbone CO (masses molaires : $M(O) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(C) = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) est modélisée par deux masses m_1 et m_2 mobiles sur l'axe $O'x$ et liées par un ressort de raideur $k = 1856 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et longueur à vide ℓ_0 . La position de l'atome de carbone (respectivement d'oxygène) est repérée par l'abscisse $x_1(t)$ (respectivement $x_2(t)$). Initialement, les deux atomes sont immobiles et leur position notées x_{10} et x_{20} .



La molécule n'est posée sur aucun support, et nous pourrions négliger le poids devant la force de rappel élastique.

R1. **Exprimer** $\ell(t)$ en fonction de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Solution: On repère facilement $\ell(t) = x_2(t) - x_1(t)$

R2. **Exprimer** la force de rappel élastique qui s'exerce sur l'atome d'oxygène.

Établir l'équation différentielle de son mouvement et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 = \omega_2^2 (x_1 + \ell_0)$$

Identifier l'expression de ω_2 .

Solution: L'atome d'oxygène est soumis seulement à la force de rappel du ressort $\vec{F}_{el,O} = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x$ (on vérifie la cohérence du signe par une petite expérience de pensée : si le ressort est comprimé...). Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système {atome d'oxygène} dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen en projection sur (Ox) donne :

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(\ell(t) - \ell_0)$$

On exprime $\ell(t)$ par la relation montrée à la première question :

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \omega_2^2 (x_1 + \ell_0) \quad (1)$$

avec $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$

R3. **Exprimer** la force de rappel élastique qui s'exerce sur l'atome de carbone.

Établir l'équation différentielle de son mouvement et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 = \omega_1^2 (x_2 - \ell_0)$$

Identifier l'expression de ω_1 .

Solution: L'atome d'oxygène est soumis seulement à la force de rappel du ressort $\vec{F}_{el,C} = k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x$ (on vérifie la cohérence du signe par une petite expérience de pensée : si le ressort est comprimé...). Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système {atome de carbone } dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen en projection sur (Ox) donne :

$$m_1 \ddot{x}_1 = k(\ell(t) - \ell_0)$$

On exprime $\ell(t)$ par la relation montrée à la première question :

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \omega_1^2 (x_2 - \ell_0) \quad (2)$$

avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$

Ces deux équations sont couplées (le mouvement d'un atome dépend du mouvement de l'autre). On introduit deux fonctions : $s(t) = m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)$ et $d(t) = x_1(t) - x_2(t)$.

R4. À partir des deux équations différentielles établies précédemment (en effectuant deux combinaisons linéaires bien choisies), **établir** les équations différentielles vérifiées par $s(t)$ et $d(t)$.

Solution:

— On multiplie l'équation (1) par m_1 et l'équation (2) par m_2 et on les somme :

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0 \text{ soit } \ddot{s} = 0 \quad (3)$$

— On fait la différence entre les équations (2) et (1) et on obtient :

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 + \omega_1^2 x_1 - \omega_2^2 x_2 = \omega_1^2 x_2 - \omega_2^2 x_1 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \ell_0$$

on peut écrire cette équation sous la forme :

$$\ddot{d} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) d = -(\omega_1^2 + \omega_2^2) \ell_0 \quad (4)$$

R5. **Résoudre** les équations sur $s(t)$ et $d(t)$.

Solution:

— L'équation sur s traduit le principe d'inertie : le système complet est isolé donc son centre de masse possède un mouvement rectiligne uniforme.

On intègre l'équation (si la dérivée seconde est nulle alors la fonction est linéaire) :

$$s(t) = At + B$$

On détermine les constantes d'intégration à l'aide des conditions initiales $s(0) = m_1 x_{10} + m_2 x_{20}$ et $\dot{s}(0) = 0$ ce qui permet d'obtenir :

$$s(t) = m_1 x_{10} + m_2 x_{20} \quad (5)$$

— L'équation vérifiée par $d(t)$ est celle d'un oscillateur harmonique. La solution s'écrit :

$$d(t) = A \cos \left(\left(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right) t \right) + B \sin \left(\left(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right) t \right) + d_{eq}$$

avec $d_{eq} = -\ell_0$ et A et B deux constantes d'intégration à déduire des conditions initiales $d(0) = x_{10} - x_{20}$ et $\dot{d}(0) = 0$ ce qui donne :

$$d(t) = (x_{10} - x_{20} + \ell_0) \cos \left(\left(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right) t \right) - \ell_0 \quad (6)$$

R6. **En déduire** les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Solution: On déduit les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de celles de $s(t)$ et $d(t)$ par les relations :

$$x_1(t) = \frac{s(t) + m_2 d(t)}{m_1 + m_2} \quad (7)$$

$$x_1(t) = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20}}{m_1 + m_2} + (x_{10} - x_{20} + \ell_0) \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos \left(\left(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right) t \right) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell_0 \quad (8)$$

$$x_2(t) = \frac{s(t) - m_1 d(t)}{m_1 + m_2} \quad (9)$$

$$x_2(t) = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20}}{m_1 + m_2} - (x_{10} - x_{20} + \ell_0) \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \left(\left(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right) t \right) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ell_0 \quad (10)$$

R7. **Exprimer** la période des oscillations en fonction de ω_1 et ω_2 .

Dans le cas où l'un des deux atomes est beaucoup plus lourd que l'autre, quel résultat retrouve-t-on ?

Solution: Les expressions précédentes sont compliquées à écrire mais décrivent pour chaque atome un mouvement d'oscillations harmoniques à la pulsation $\omega_1 + \omega_2$ c'est-à-dire avec la période :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$$

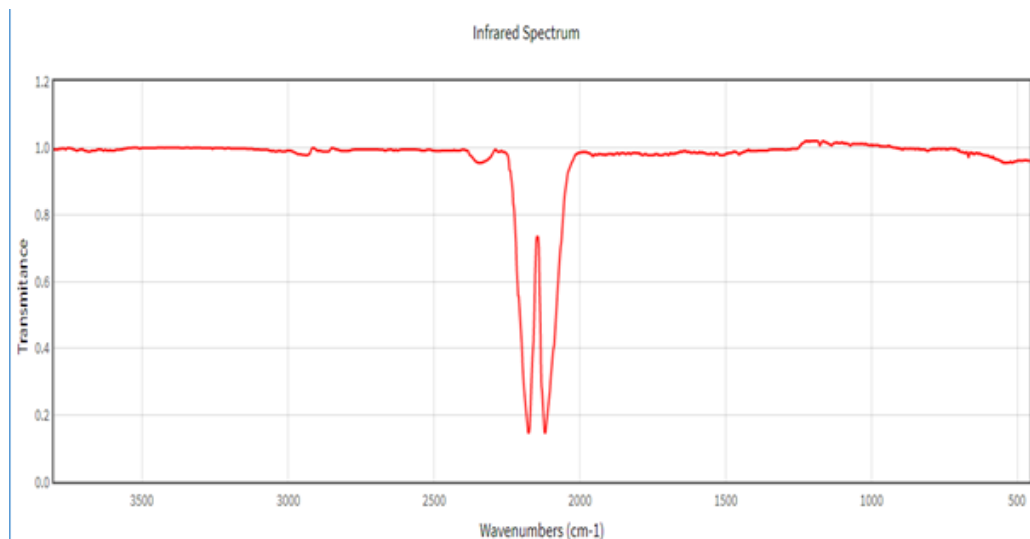
Si l'atome 1 est beaucoup plus lourd que l'atome 2, on a $\omega_1 \ll \omega_2$ et $T \simeq \frac{2\pi}{\omega_2}$ tout se passe comme si l'atome 1 était fixe et l'atome 2 oscille comme dans le cas de l'oscillateur harmonique *simple*.

$$x_1(t) \approx \frac{m_1 x_{10}}{m_1} = x_{10} \text{ (on néglige les termes en } m_2 \text{ devant ceux en } m_1 \text{).}$$

$$\text{et } x_2(t) \approx \frac{m_1 x_{10} - m_1 (x_{10} - x_{20} + \ell_0) \cos \left(\left(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right) t \right) + m_1 \ell_0}{m_1} = (x_{20} - \ell_0) \cos \left(\left(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right) t \right) + \ell_0$$

R8. On donne ci-dessous le spectre en absorption du monoxyde de carbone. On rappelle que le nombre d'onde en abscisse (donné en cm^{-1}) est l'inverse de la longueur d'onde de l'onde électromagnétique absorbée.

Estimer la valeur k de la raideur du ressort.



Solution: On repère un pic d'absorption centré sur un nombre d'onde de l'ordre de $\sigma_{CO} = 2200 \text{ /cm}$.

Or $\sigma_{CO} = \frac{1}{\lambda_{CO}} = \frac{1}{cT_{CO}}$, où c est la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.

On en déduit la période de l'onde associée $T_{CO} = \frac{1}{c\sigma_{CO}}$.

Vu les expressions des pulsations, on en déduit $k = \frac{4\pi^2(m_1m_2)}{T_{CO}^2(m_1 + m_2)}$, avec $m_1 = \frac{M_C}{\mathcal{N}_A}$ et $m_2 = \frac{M_O}{\mathcal{N}_A}$

 Remarque –

$$\text{Masse d'un atome} = \frac{\text{Masse molaire atomique}}{\text{Constante d'Avogadro}}$$

$$k = \frac{4\pi^2 M_C M_O c^2 \sigma_{CO}^2}{\mathcal{N}_A (M_C + M_O)} = 2.10^3 \text{ N/m}$$

On retrouve l'ordre de grandeur de la constante de raideur donnée au début de l'énoncé.